Problème 1.

Partie I. Convergence.

1. La série $(\sum x_n \, 16^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs car

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{8n+5} &< \frac{1}{8n+4}\\ \frac{1}{8n+6} &< \frac{1}{8n+4}\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n > 4\left(\frac{1}{8n+1} - \frac{1}{8n+4}\right) > 0.$$

Elle est convergente car

$$\forall n \in \mathbb{N},\; x_n \, 16^{-n} < \frac{4}{8n+1}\, 16^{-n} < \frac{4}{8n}\, 16^{-n} = \frac{1}{2n}\, 16^{-(n)} < \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

2. La minoration $0 < r_n$ vient de ce que la série est à terme positif. Majorons comme dans la question précédente :

$$\forall k > n, \qquad x_k \, 16^{-k} \leq \frac{1}{2(n+1)}\, 16^{-k}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\forall m > n,\; \sum_{k=n+1}^{m} x_k \, 16^{-k} &\leq \frac{16^{-(n+1)}}{n+1}\left(1 + 16^{-1} + \cdots + 16^{-(m-n-1)}\right)\\ &\leq \frac{16^{-(n+1)}}{n+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15(n+1)} 16^{-(n+1)} < 16^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

On peut noter que l'on a un peu « gaspillé » le terme en $n+1$ du dénominateur. En fait le reste est négligeable devant 2^{-4n}.

Partie II. Développements hexadécimaux.

1. a. Écrivons la division euclidienne, divisons par q puis multiplions par 16^{-n}

$$\begin{aligned}16^n u = q_n v + r_n \text{ avec } 0 \leq r_n < q &\Rightarrow 16^n x = q_n + \frac{r_n}{q} \text{ avec } 0 \leq \frac{r_n}{q} < 1\\ &\Rightarrow x = 16^{-n} q_n + 16^{-n}\frac{r_n}{q} \text{ avec } 0 \leq 16^{-n}\frac{r_n}{q} < 16^{-n}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$a_n(x) = 16^{-n} q_n, \qquad b_n(x) = \frac{16^{-n} r_n}{q}.$$

b. D'après la question a., le coefficient de 16^{-n} dans le développement de x est le reste modulo 16 de q_n.

c. D'après la question a., le coefficient de $16^{-(n+1)}$ dans le développement de x est le quotient de la division par q de $16 \times q_n$.

2. Comme 47 est congru à 2 modulo 15 et 16 congru à 1 modulo 15, la suite des restes modulo 15 de $16^n \times 47$ est constante égale à 2. La même division $16 \times 2 = 2 \times 15 + 2$ se repète. Le développement hexadécimal de x_0 ne contient que des 2 sauf le premier coefficient égal à 3.

3. a. D'après la question 2., la première ligne du tableau ne contient que des 2. Les deux premières divisions nous donnent

$$x_1 = 2 \times 16^{-1} + \frac{58}{819} \times 16^{-1} = 2 \times 16^{-1} + 1 \times 16^{-2} + \frac{109}{819} \times 16^{-2}.$$

On en déduit la deuxième ligne.
Comme $16 \times 829 < 19635$, on a $x_2 < 16^{-1}$ donc la troisième ligne commence par quatre 0. La troisième ligne également à cause de la question I.2. $\varepsilon_2 < 16^{-3}$.

n	0	1	2	3	4
x_0	3	2	2	2	2
$x_1 16^{-1}$	0	0	2	1	?
$x_2 16^{-2}$	0	0	0	0	?
ε_2	0	0	0	0	?

b. Dans le tableau précédent, il manque trois valeurs dans la dernière colonne. Il est possible qu'une retenue soit nécessaire mais même avec une retenue (la plus grande possible est 2), la somme des termes de la colonne $n = 3$ sera strictement plus petite que 16. On en déduit que les colonnes précédentes fournissent un développement correct.
Le développement hexadécimal de s commence par 3.24

4. D'après la question précédente

$$\begin{aligned}3 + 2 \times 16^{-1} + 4 \times 16^{-2} &< s < 2 + 2 \times 16^{-1} + 5 \times 16^{-2}\\ \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} &< s < 3 + \frac{1}{8} + \frac{5}{256}\\ \Rightarrow 3.13970 &< s < 3.14454\end{aligned}$$

Partie III. Calculs formels de sommes.

1. a. Il est évident que
$$\int_0^c t^{8n+l}\,dt = \frac{c^{8n+l+1}}{8n+l+1}.$$
Pour faire apparaitre le 16^{-n} il faut choisir $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   b. La série est à termes positifs, elle est majorée par une série géométrique convergente car $c<1$. Elle est donc convergente.

2. a. Comme les dénominateurs sont positifs, la différence (droite - gauche) est du signe de
$$c^8(1-t^8)-t^8(1-c^8) = c^8 - t^8 > 0 \text{ car } t<c.$$
On en déduit l'inégalité demandée.

   b. On utilise la formule pour la somme des termes en progression géométrique
$$\sum_{i=0}^{n} t^{8i+l} = t^k\,\frac{1-t^{8(n+1)}}{1-t^8} \Rightarrow \frac{t^l}{1-t^8} - \sum_{i=0}^{n} t^{8i+l} = \frac{t^{8(n+1)+l}}{1-t^8}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{t^l}{1-t^8} - \sum_{i=0}^{n} t^{8i+l}\right| \leq c^{8n+l}\frac{t^8}{1-t^8} \leq \frac{c^{8(n+1)+l}}{1-c^8}.$$

   c. Notons
$$\theta_n(t) = \frac{t^l}{1-t^8} - \sum_{i=0}^{n} t^{8i+l}$$
de sorte que
$$\frac{t^l}{1-t^8}\,dt = \sum_{i=0}^{n} t^{8i+l} + \theta_n(t)$$
Intégrons entre 0 et c :
$$\int_0^c \frac{t^l}{1-t^8}\,dt = \sum_{i=0}^{n}\frac{c^{8i+l+1}}{8i+k+1} + \int_0^n \theta_n(t)\,dt$$
De plus
$$\left|\int_0^n \theta_n(t)\,dt\right| \leq \int_0^c |\theta_n(t)|dt \leq \frac{c^{8(n+1)+l+1}}{1-c^8}.$$
Pour $0<c<1$ fixé, la suite en n à droite converge vers 0. Comme on sait que la série converge, on obtient une valeur pour la somme
$$\int_0^c \frac{t^l}{1-t^8}\,dt = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c^{8i+l+1}}{8i+l+1}.$$

3. Considérons $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans la relation précédente.
$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c^{8i+l+1}}{8i+l+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{l+1}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{16^{-i}}{8i+l+1}$$
On combine ces relations :
– pour $l=0$, on multiplie par 4
– pour $l=3$, on multiplie par -2
– pour $l=4$, on multiplie par -1
– pour $l=5$, on multiplie par -1
On obtient
$$s = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-t^8}\,dt - 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{1-t^8}\,dt - 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^4}{1-t^8}\,dt - 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^5}{1-t^8}\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{8t^5+4\sqrt{2}t^4+8t^3-4\sqrt{2}}{t^8-1}\,dt$$

4. Les racines de X^8-1 sont les racines 8-èmes de l'unité
$$\mathbb{U}_8 = \left\{1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}$$
En regroupant les racines conjuguées, on obtient
$$X^8-1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1).$$
La fraction dans l'intégrale se simplifie donc par $(X^2+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$:
$$s = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{8(t-\frac{1}{\sqrt{2}})}{(t^2-1)(t^2-\sqrt{2}t+1)}\,dt$$
On procède au changement de variable $x=\sqrt{2}t$:
$$s = \int_0^1 \frac{\frac{8}{\sqrt{2}}(x-1)}{(\frac{x^2}{2}-1)(\frac{x^2}{2}-x+1)}\frac{dx}{\sqrt{2}} = 16\int_0^1\frac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}\,dx$$

5. La décompostion proposée découle d'une décomposition en éléments simples. On calcule les coefficients en formant des équations. On multiplie par x et on va en ∞, on prend les valeurs en 0 en 1 et en -1.
$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\delta}{2} = 4 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \dfrac{-\alpha+\beta}{5} - \gamma + \delta = \dfrac{32}{5} \end{cases}$$
Après calculs, on trouve $\alpha = \gamma = -4$, $\delta = 0$ et $\beta = 8$ soit :
$$16\frac{X-1}{(X^2-2X+2)(X^2-2)} = \frac{-4X+8}{X^2-2X+2} + \frac{-4X}{2-X^2}$$

6. On met la fraction sous une forme plus commode à intégrer :
$$16\frac{X-1}{(X^2-2X+2)(X^2-2)} = -2\frac{2X-2}{X^2-2X+2} + 4\frac{1}{1+(X-1)^2} + 2\frac{-2X}{2-X^2}$$
On en déduit
$$\begin{aligned} s &= -2\left[\ln(x^2-2x+2)\right]_0^1 + 4\left[\arctan(x-1)\right]_0^1 + 2\left[\ln(2-t^2)\right]_0^1 \\ &= -2\ln 2 + 4\frac{\pi}{4} + 2\ln 2 = \pi \end{aligned}$$

Problème 2.

D'après X-ens 2013 PC

Partie I. Questions préliminaires.

1. Notons f la fonction considérée, en exprimant les valeurs absolues dans les différents cas, on obtient

x	$]-\infty,a]$	$[a,b]$	$[b,c]$	$[c,d]$	$[d,+\infty[$
$f(x)$	0	$2(x-a)$	$2(d-c)$	$2(d-x)$	0

L'hypothèse $a+d=b+c$ intervient pour $f(x)=0$ dans les deux intervalles infinis. On en déduit que f est à valeurs positives.

2. L'équivalence entre les trois propriétés est un résultat de cours. La base obtenue à partir de $\mathcal{E}$ en permutant les vecteurs de manière à ce que les deux premiers soient e_p et e_q est orthogonale. Dans cette base, la matrice de $r_{p,q,\theta}$ est diagonale par blocs orthogonaux :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$$
Le bloc en haut à gauche est la matrice d'une rotation du plan. Avec le produit matriciel par blocs, on vérifie facilement que cette matrice est orthogonale donc que $r_{p,q,\theta}$ conserve le produit scalaire.

Partie II. Conjugaison par une matrice de rotation.

1. La matrice S' est symétrique d'après les propriétés usuelles de la transposition.
En regardant $R_{p,q}(\theta)$ comme la matrice de passage (orthogonale) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, la définition de S' apparait comme une formule de changement de base. La matrice S' est donc la matrice de f dans la base orthonormée $\mathcal{E}'$. On en déduit
$$s'_{i,j} = \text{ coordonnée selon } e'_i \text{ de } f(e'_j) \; = < e'_i / f(e'_j) > .$$

2. Calcul de S'.
   a. D'après 1. et l'orthogonalité de la famille :
$$\begin{aligned} s'_{p,p} &= < e'_p / f(e'_p) > = < \cos\theta e_p + \sin\theta e_q / \cos\theta f(e_p) + \sin\theta f(e_q) > \\ &= < \cos\theta e_p + \sin\theta e_q / \cos\theta \left(s_{p,p}e_p + s_{q,p}e_q\right) + \sin\theta\left(s_{p,q}e_p + s_{q,q}e_q\right) > \\ &= \cos^2\theta s_{p,p} + \cos\theta\sin\theta s_{p,q} + \sin\theta\cos\theta s_{q,p} + \sin^2\theta s_{q,q} \\ &= \cos^2\theta s_{p,p} + 2\cos\theta\sin\theta s_{p,q} + \sin^2\theta s_{q,q}. \end{aligned}$$
   Par un calcul analogue avec $e'_q = -\sin\theta e_p + \cos\theta e_q$, on trouve
$$s'_{q,q} = \sin^2\theta s_{p,p} - 2\cos\theta\sin\theta s_{p,q} + \cos^2\theta s_{q,q}.$$
   En sommant les deux expressions, on obtient
$$s'_{p,p} + s'_{q,q} = s_{p,p} + s_{q,q}$$
   b. Le principe du calcul est le même qu'au dessus. On trouve
$$s'_{p,q} = -\cos\theta\sin\theta s_{p,p} + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)s_{p,q} + \cos\theta\sin\theta s_{q,q}.$$

c. De même pour $k \notin \{p,q\}$, on trouve :

$$s'_{p,k} = \cos\theta s_{p,k} + \sin\theta s_{q,k}, \qquad s'_{q,k} = -\sin\theta s_{p,k} + \cos\theta s_{q,k} \tag{1}$$

3. a. Comme $-\frac{\pi}{2} < \cos\theta < \frac{\pi}{2}$, on peut diviser par $\cos^2\theta \neq 0$. D'après 2.a.,

$$\begin{aligned} s'_{p,q} = 0 &\Leftrightarrow -\tan\theta\, s_{p,p} + (1-\tan^2\theta)s_{p,q} + \tan\theta\, s_{q,q} = 0 \\ &\Leftrightarrow s_{p,q}\tan^2\theta + (s_{p,p} - s_{q,q})\tan\theta - s_{p,q} = 0 \end{aligned}$$

Comme $s_{p,q} \neq 0$, on a bien prouvé que $s'_{p,q} = 0$ si et seulement si $\tan\theta$ est solution de l'équation en t :

$$t^2 + \frac{s_{p,p} - s_{q,q}}{s_{p,q}}\, t - 1 = 0 \tag{2}$$

b. L'équation **??** admet deux racines réelles car son discriminant est strictement positif. Le produit de ces deux racines est -1 donc le produit des deux modules est 1. Ceci montre que exactement une des deux est dans $]-1,1[$. On la note t_0 et on pose $\theta_0 = \arctan t_0$.

4. La première relation est une simple reformulation de l'équation

$$\tan^2\theta_0 + \frac{s_{p,p} - s_{q,q}}{s_{p,q}}\tan\theta_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow s_{p,p} - s_{q,q} = s_{p,q}\frac{1-\tan^2\theta_0}{\tan\theta_0}$$

On reprend les formules de la question **??** pour les exprimer avec $t_0 = \tan\theta_0$.

$$\begin{aligned} s'_{p,p} - s_{p,p} &= (\cos^2\theta_0 - 1)s_{p,p} + 2\cos\theta_0\sin\theta_0 s_{p,q} + \sin^2\theta_0 s_{q,q} \\ &= -\sin^2\theta_0\,(s_{p,p} - s_{q,q}) + 2\cos\theta_0\sin\theta_0 s_{p,q} \\ &= \cos^2\theta_0\left(-t_0(1-t_0^2) + 2t_0\right)s_{p,q} = \frac{t_0(t_0^2+1)}{1+t_0^2}s_{p,q} = t_0 s_{p,q}. \end{aligned}$$

De plus

$$s'_{p,p} + s'_{q,q} = s_{p,p} + s_{q,q} \Rightarrow s'_{q,q} - s_{q,q} = s_{p,p} - s'_{p,p} = -t_0 s_{p,q}.$$

5. a. Lorsque ni i ni j ne sont dans $\{p,q\}$, $e'_i = e_i$ et $f(e'_j) = f(e_j)$ donc $s'_{i,j} = s_{i,j}$. On en déduit,

$$\|E'\|^2 = \|E\|^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq p}}^{n}({s'_{p,k}}^2 - {s_{p,k}}^2) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq q}}^{n}({s'_{q,k}}^2 - {s_{q,k}}^2)$$

En utilisant les relations **??**, on obtient pour $k \notin \{p,q\}$:

$${s'_{p,k}}^2 + {s'_{q,k}}^2 = {s_{p,k}}^2 + {s_{q,k}}^2$$

Il ne reste donc plus que

$$\|E'\|^2 = \|E\|^2 + ({s'_{p,q}}^2 - {s_{p,q}}^2) + ({s'_{q,p}}^2 - {s_{q,p}}^2) = \|E\|^2 - 2{s_{q,p}}^2$$

car $s'_{p,q} = 0$.

b. La relation $\|S'\| = \|S\|$ vient de l'expression de la norme avec la trace et de la possibilité de permuter les matrices dans la trace d'un produit. Les autres formules sont évidentes à partir de l'expression comme somme des carrés des coefficients. On en déduit

$$\|D'\|^2 = \|S'\|^2 - \|E'\|^2 = \|S\|^2 - \|E\|^2 + 2s_{q,p}^2 = \|D\|^2 + 2s_{q,p}^2.$$

6. Les expressions des coefficients de S' sont donnés par la question 2. Ils font intervenir des $\sin\theta$ et $\cos\theta$que l'on peut exprimer avec t_0

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}}, \sin\theta_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}}$$

car $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\theta_0 > 0$. En fait on a même $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ à cause du choix de la racine dans $]-1,1[$.

7. On suppose dans cette question que $s_{p,q}$ est le coefficient de E de plus grande valeur absolue parmi les $s_{i,j}$ avec $i \neq j$.

a. À cause du choix du couple p_m, q_m, on peut majorer les $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients intervenant dans la somme :

$$\|E\|^2 \leq \frac{n(n-1)}{2}s_{p,q}^2 \Rightarrow s_{p,q}^2 \geq \frac{2}{n(n-1)}\|E\|^2.$$

b. On peut en déduire une majoration de la norme de E' :

$$\|E'\|^2 = \|E\|^2 - 2s_{p,q} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)\|E\|^2$$

Posons

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{2}{n(n-1)}}.$$

Rappelons que $n \geq 2$ est la dimension de l'espace. C'est un nombre fixé indépendant de S pour lequel l'expression dans la racine est dans $]0,1[$ tel que
$$\|E'\| \leq \rho \|E\|.$$

c. Sur la diagonale, seuls les coefficients p,p et q,q interviennent :
$$\|D' - D\|^2 = (s'_{p,p} - s_{p,p})^2 + (s'_{q,q} - s_{q,q})^2 = 2t_0^2 s_{p,q}^2$$
d'après la question 4.

Comme $|t_0| \leq 1$,
$$\|D' - D\|^2 \leq 2s_{p,q}^2 \leq \|E\|^2$$
car $s_{p,q}$ figure deux fois parmi les coefficients de E.

8. a. D'après II.2. puis II.4.
$$\left.\begin{aligned} s'_{p,p} &= \cos^2\theta s_{p,p} + 2\cos\theta\sin\theta s_{p,q} + \sin^2\theta s_{q,q} \\ s'_{q,q} &= \sin^2\theta s_{p,p} - 2\cos\theta\sin\theta s_{p,q} + \cos^2\theta s_{q,q} \end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow s'_{q,q} - s'_{p,p} = \left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)(s_{q,q} - s_{p,p}) - 4\sin\theta_0\cos\theta_0 s_{p,q}$$
$$= -\left(\frac{1-t_0^2}{1+t_0^2}\frac{1-t_0^2}{t_0} + 4\frac{t_0}{1+t_0^2}\right)s_{p,q} = -\frac{1+t_0^2}{t_0}s_{p,q}.$$

b. D'après la question précédente et II.4.,
$$(s'_{q,q} - s'_{p,p})^2 - (s_{q,q} - s_{p,p})^2 = \left(\frac{(1+t_0^2)^2}{t_0^2} - \frac{(1-t_0^2)^2}{t_0^2}\right)s_{p,q}^2 = 4s_{p,q}^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow \left|s'_{q,q} - s'_{p,p}\right| \geq |s_{q,q} - s_{p,p}|.$$

9. a. On sait déjà d'après 2.a que $s_{p,p} - s'_{p,p} = s'_{q,q} - s_{q,q}$. Il suffit donc de montrer que l'un des deux est du signe de $s_{q,q} - s_{p,p}$.
Cela résulte de 4. et du choix de t_0
$$s_{p,p} - s_{q,q} = \frac{1-t_0^2}{t_0}s_{p,q}, \qquad s'_{p,p} - s_{p,p} = t_0 s_{p,q}, \qquad 1 - t_0^2 > 0$$

b. Supposons par exemple que les deux expressions de la question précédentes soient positives. Alors
$$s'_{p,p} \leq s_{p,p} \leq s_{q,q} \leq s'_{q,q}.$$
On peut appliquer le résultat de la question préliminaire et conclure en prenant la valeur en $s_{i,i}$
$$|s_{i,i} - s'_{q,q}| + |s_{i,i} - s'_{p,p}| - |s_{i,i} - s_{p,p}| - |s_{i,i} - s_{q,q}| \geq 0$$
L'autre cas se traite de manière analogue.

10. On a défini
$$R = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |s_{i,i} - s_{j,j}|, \qquad R' = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|s'_{i,i} - s'_{j,j}\right|$$

Pour $i \notin \{p,q\}$, on a $s'_{i,i} = s_{i,i}$. Dans la différence, il ne reste donc que les autres termes
$$R' - R = \sum_{i=1}^{n}\left(|s'_{i,i} - s'_{p,p}| - |s_{i,i} - s_{p,p}| + |s'_{i,i} - s'_{q,q}| - |s_{i,i} - s_{q,q}|\right)$$

D'après la question précédente, tous les termes de cette somme sont positifs. On ne garde que ceux avec i égal à p ou q :
$$R' - R \geq 2\left(|s'_{p,p} - s'_{q,q}| - |s_{p,p} - s_{q,q}|\right)$$

Or
$$s'_{q,q} - s'_{p,p} = (s'_{q,q} - s_{q,q}) + (s_{q,q} - s_{p,p}) + (s_{p,p} - s'_{p,p})$$
avec les trois parenthèses de même signe d'après 9.a. On en déduit
$$|s'_{q,q} - s'_{p,p}| = |s'_{q,q} - s_{q,q}| + |s_{q,q} - s_{p,p}| + |s_{p,p} - s'_{p,p}|$$
$$\Rightarrow |s'_{q,q} - s'_{p,p}| - |s_{q,q} - s_{p,p}| = |s'_{q,q} - s_{q,q}| + |s_{p,p} - s'_{p,p}|$$
$$\Rightarrow R' - R \geq 2\left(|s'_{q,q} - s_{q,q}| + |s_{p,p} - s'_{p,p}|\right) = 2\sum_{i=1}^{n}|s'_{i,i} - s_{i,i}|$$
car les autres termes sont nuls.

Partie III. Algorithme.

1. a. On majore grossièrement (pour les termes non nuls) la valeur absolue de la différence par la somme des valeurs absolues.

$$\begin{aligned} R_m &\leq \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right| + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \left|\sigma_{i,i}^{(m)}\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}(n-1)\left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right| + \sum_{i=1}^{n}(n-1)\left|\sigma_{i,i}^{(m)}\right| = 2(n-1)\sum_{j=1}^{n}\left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right| \end{aligned}$$

La deuxième inégalité est l'inégalité de Cauchy-Schwarz en écrivant

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right|\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} 1 \times \left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right|\right)^2.$$

b. On a vu en II.5.b. que la norme est conservée :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \left\|\Sigma^{(m)}\right\| = \|\Sigma\|.$$

D'après la question précédente

$$R_m \leq 2(n-1)\sqrt{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{j,j}^{(m)})^2} \leq 2(n-1)\sqrt{n}\,\|\Sigma\|$$

en négligeant les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale et en utilisant la conservation de la norme.

2. On peut appliquer la dernière question de la partie II. avec $S = \Sigma^{(m)}$, $S' = \Sigma^{(m+1)}$.

$$R_{m+1} - R_m = R' - R \geq 2\sum_{i=1}^{n}|s'_{i,i} - s_{i,i}| = 2\epsilon_m.$$

La série des ϵ_m étant à termes positifs, il suffit de montrer que les sommes partielles sont majorées. Or l'inégalité précédente entraîne

$$\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k \leq \frac{1}{2}\left(R_{m+1} - R_0\right) \leq \frac{R_{m+1}}{2} \leq (n-1)\sqrt{n}\,\|\Sigma\|.$$

La série est donc convergente (rappelons que n est la dimension de l'espace).

3. a. On peut regarder chaque coefficient de la suite de matrices $D^{(m)}$ comme une somme partielle de la série

$$\left(\sum \sigma_{i,i}^{(m+1)} - \sigma_{i,i}^{(m)}\right).$$

D'après la question précédente, cette série est absolument convergente donc convergente. On en déduit la convergence de chaque suite de coefficients donc de la partie diagonale.

b. D'après la question 7.b. $S = \Sigma^{(m)}$, $S' = \Sigma^{(m+1)}$,

$$\left\|E^{(m+1)}\right\| \leq \rho\left\|E^{(m)}\right\|.$$

La suite des $\left\|E^{(m)}\right\|$ est dominée par une suite géométrique de raisons $\rho \in]0,1[$. Elle converge donc vers 0. On en déduit que la suite des matrices $E^(m)$ converge vers la matrice nulle. Toutes les suites de coefficients hors de la diagonale convergent vers 0.