Problème 1.

Ce texte porte sur une série convergente pour laquelle on dispose à la fois d'une expression exacte simple de la somme et d'un algorithme efficace permettant de calculer le développement hexadécimal (en base 16) de cette somme (formule de S. Plouffe 1997).
On considère la série $\left(\sum x_n\, 16^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}.$$

Les premières valeurs de x_n sont

$$x_0 = \frac{47}{15}, \qquad x_1 = \frac{106}{819}, \qquad x_2 = \frac{829}{19635}$$

Partie I. Convergences.

1. Montrer que $\left(\sum x_n\, 16^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série à termes positifs convergente.
   On note s sa somme, s_n la somme partielle et ε_n le reste à l'ordre n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s = s_n + \varepsilon_n, \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\, 16^{-k}.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \varepsilon_n < 16^{-(n+1)}.$$

Partie II. Développements hexadécimaux.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $a_n(x)$ l'approximation hexadécimale par défaut de x à l'ordre n :

$$x = a_n(x) + b_n(x) \text{ avec } a_n \in \mathbb{Z} \times 16^{-n} \text{ et } 0 \leq b_n(x) < 16^{-n}$$

1. On suppose qu'il existe u et v dans $\mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{u}{v}$.
   a. Exprimer $a_n(x)$ et $b_n(x)$ en fonction du quotient q_n et du reste r_n de la division de $16^n\, u$ par v.
   b. Exprimer, en fonction de $q_n(x)$, le coefficient de 16^{-n} dans le développement de x en base 16.
   c. Exprimer, en fonction de $r_n(x)$, le coefficient de $16^{-(n+1)}$ dans le développement de x en base 16.
2. Former la suite des restes des divisions de $16^n \times 47$ par 15. En déduire le développement hexadécimal de x_0.
3. Les divisions suivantes sont données :

$$16 \times 106 = 2 \times 819 + 58, \qquad 16 \times 58 = 1 \times 819 + 109, \qquad 16 \times 829 = 13264$$

   a. Former un tableau donnant les coefficients de 16^{-n} (avec $n \in [\![0,4]\!]$) des développements hexadécimaux de $x_0 16^{-0}$, $x_1 16^{-1}$, $x_2 16^{-2}$, ε_2 en plaçant un « ? » pour les coefficients que vous ne pouvez pas calculer facilement.
   b. Quel développement hexadécimal de s peut-on en déduire ?
4. Écrire à l'aide de puissances de 16 l'encadrement de s correspondant à la question précédente. En déduire une approximation décimale de s.

Partie III. Calculs formels de sommes.

Dans cette partie, c représente un réel de $]0,1[$ et l un entier naturel.

1. a. Calculer $\int_0^c t^{8n+l}\, dt$. Comment doit-on choisir c pour faire apparaitre les suites figurant dans $16^{-n} x_n$?
   b. Montrer la convergence de la série

$$\left(\sum \frac{c^{8n+l+1}}{8n+l+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Expression des sommes élémentaires.
   a. Montrer que

$$\forall c \in]0,1[,\ \forall t \in [0,c], \qquad \frac{t^8}{1-t^8} \leq \frac{c^8}{1-c^8}$$

   b. Montrer que

$$\forall t \in [0,c], \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \frac{t^l}{1-t^8} - \sum_{i=0}^{n} t^{8i+l} \right| \leq \frac{c^{8n+8+l}}{1-c^8}$$

   c. En déduire

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c^{8i+l+1}}{8i+l+1} = \int_0^c \frac{t^l}{1-t^8}\, dt$$

3. Montrer que
$$s = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{8t^5 + 4\sqrt{2}\,t^4 + 8t^3 - 4\sqrt{2}}{t^8 - 1}\,dt$$
4. Quelles sont les racines complexes du polynôme $X^8 - 1$?
En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. On admet
$$8X^5 + 4\sqrt{2}\,X^4 + 8X^3 - 4\sqrt{2} = 8(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}\,X+1)(X - \frac{1}{\sqrt{2}})$$
En déduire une nouvelle expression de s comme une intégrale simplifiée entre 0 et 1.
5. Déterminer les réels α, β, γ, δ tels que
$$16\frac{X-1}{(X^2-2X+2)(X^2-2)} = \frac{\alpha X + \beta}{X^2 - 2X + 2} + \frac{\gamma X + \delta}{2 - X^2}$$
6. En déduire s.

Problème 2.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée. Son produit scalaire est noté $< / >$.
Pour tout $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $p < q$ et tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on définit l'endomorphisme $r_{p,q,\theta}$ de E par l'image de la base $\mathcal{E}$:
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad r_{p,q,\theta}(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq p \text{ et } i \neq q \\ \cos\theta e_p + \sin\theta e_q & \text{si } i = p \\ -\sin\theta e_p + \cos\theta e_q & \text{si } i = q \end{cases}$$
On note $R_{p,q}(\theta)$ la matrice de $r_{p,q,\theta}$ dans $\mathcal{E}$ et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e'_i = r_{p,q,\theta}(e_i)$.

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ on note
$$\|M\|^2 = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j}^2 = \operatorname{tr}({}^tM\,M)$$
On ne demande pas de prouver la dernière égalité.

Partie I. Questions préliminaires.

1. On se donne quatre nombres réels $a \leq b \leq c \leq d$ tels que $a + d = b + c$. Montrer que la fonction $x \mapsto |x-a| - |x-b| - |x-c| + |x-d|$ est à valeurs positives.
2. Montrer les trois propriétés suivantes
   – l'endomorphisme $r_{p,q,\theta}$ conserve le produit scalaire,
   – la matrice $R_{p,q}(\theta)$ est orthogonale,
   – la famille $\mathcal{E}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ est orthonormée.

Partie II. Conjugaison par une matrice de rotation.

Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est symétrique. On la note $S = (s_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. On suppose $s_{p,q} \neq 0$ et on pose
$$S' = (s'_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = {}^tR_{p,q}(\theta)\,S\,R_{p,q}(\theta).$$
1. Montrer que S' est symétrique et que
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad s'_{i,j} =< e'_i / f(e'_j) > .$$
2. Calcul de S'.
   a. Exprimer $s'_{p,p}$ et $s'_{q,q}$ en fonction de $s_{p,p}$, $s_{q,q}$, $s_{p,q}$. En déduire
   $$s'_{p,p} + s'_{q,q} = s_{p,p} + s_{q,q}$$
   b. Exprimer $s'_{p,q}$ en fonction de $s_{p,p}$, $s_{q,q}$, $s_{p,q}$.
   c. Pour $k \notin \{p,q\}$, exprimer $s'_{p,k}$ et $s'_{q,k}$ en fonction de $s_{p,k}$, $s_{q,k}$.
3. On cherche un θ pour lequel $s'_{p,q} = 0$.
   a. Montrer que $s'_{p,q} = 0$ si et seulement si $\tan\theta$ est une solution de l'équation d'inconnue t
   $$t^2 + \frac{s_{p,p} - s_{q,q}}{s_{p,q}}\,t - 1 = 0 \tag{1}$$
   b. Montrer que cette équation admet une unique solution $t_0 \in]-1,+1]$. On note $\theta_0 = \arctan t_0$. Dans la suite de cette partie, on suppose $\theta = \theta_0$.
4. Montrer que :
$$s_{p,p} - s_{q,q} = \frac{1 - t_0^2}{t_0}\,s_{p,q}, \qquad s'_{p,p} - s_{p,p} = t_0 s_{p,q}, \qquad s'_{q,q} - s_{q,q} = -t_0 s_{p,q}.$$

5. On décompose S sous la forme $S = D + E$ avec D diagonale et E à diagonale nulle. On décompose de même S' en $S' = D' + E'$.
   a. Montrer que
   $$\|E'\|^2 = \|E\|^2 - 2s_{p,q}^2.$$
   b. Montrer que
   $$\|S'\|^2 = \|S\|^2, \qquad \|S\|^2 = \|D\|^2 + \|E\|^2, \qquad \|S'\|^2 = \|D'\|^2 + \|E'\|^2.$$
   En déduire une expression de $\|D'\|^2$ en fonction de $\|D\|^2$ et $s_{p,q}^2$.
6. Montrer que les coefficients de S' s'expriment uniquement en fonction de ceux de S et de $t_0 = \tan\theta_0$.
7. On suppose dans cette question que $s_{p,q}$ est le coefficient de E de plus grande valeur absolue parmi les $s_{i,j}$ avec $i \neq j$.
   a. Montrer que $\|E\|^2 \leq n(n-1)s_{p,q}^2$. En déduire une minoration de $s_{p,q}^2$ en fonction de $\|E\|$ et de n.
   b. Montrer que $\|E'\| \leq \rho\,\|E\|$ où $\rho < 1$ est une constante que l'on précisera.
   c. Montrer que $\|D - D'\| \leq \|E\|$.
8. a. En utilisant les questions II.2. et II.4., montrer que
   $$s'_{q,q} - s'_{p,p} = -\frac{1+t_0^2}{t_0}s_{p,q}.$$
   b. En calculant $(s'_{q,q} - s'_{p,p})^2 - (s_{q,q} - s_{p,p})^2$, montrer que
   $$\left|s'_{q,q} - s'_{p,p}\right| \geq \left|s_{q,q} - s_{p,p}\right|.$$
9. a. Montrer que $s_{p,p} - s'_{p,p}$ et $s'_{q,q} - s_{q,q}$ sont du même signe que $s_{q,q} - s_{p,p}$.
   b. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que
   $$\left|s_{i,i} - s'_{q,q}\right| + \left|s_{i,i} - s'_{p,p}\right| - \left|s_{i,i} - s_{p,p}\right| - \left|s_{i,i} - s_{q,q}\right| \geq 0$$
10. On définit
   $$R = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|s_{i,i} - s_{j,j}\right|, \qquad R' = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|s'_{i,i} - s'_{j,j}\right|$$
   Montrer que
   $$R' - R \geq 2\left(\left|s'_{q,q} - s_{q,q}\right| + \left|s'_{p,p} - s_{p,p}\right|\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\left|s'_{i,i} - s_{i,i}\right|.$$

Partie III. Algorithme.

Soit $\left(A^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $\left(A^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si la suite de réels $\left(\left\|A^{(m)} - A\right\|\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ceci est équivalent à :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}} \to a_{i,j}.$$
On ne demande pas de le démontrer.
Dans l'algorithme de Jacobi, on part d'une matrice Σ symétrique et on construit une suite $\left(\Sigma^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ de matrices symétriques. Les coefficients de $\Sigma^{(m)}$ sont notés $\sigma_{i,j}^{(m)}$.
- On pose $\Sigma^{(0)} = \Sigma$.
- Lorsque $\Sigma^{(m)}$ est connu, on considère p_m et q_m avec $p_m < q_m$ et tels que $\sigma_{p-m,q_m}^{(m)}$ soit le coefficient de $\Sigma^{(m)}$ de plus grande valeur absolue.
- On applique alors les calculs de la partie II à la matrice $S = \Sigma^{(m)}$ et au couple (p_m, q_m). La matrice $\Sigma^{(m+1)}$ est alors la matrice S' étudiée en II.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit
   $$R_m = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|\sigma_{j,j}^{(m)} - \sigma_{i,i}^{(m)}\right|.$$
   a. Montrer que
   $$R_m \leq 2(n-1)\sum_{j=1}^{n}\left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right|, \qquad \left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right|\right)^2 \leq n\sum_{j=1}^{n}\left|\sigma_{j,j}^{(m)}\right|^2.$$
   b. Montrer que
   $$R_m \leq 2(n-1)\sqrt{n}\,\|\Sigma\|.$$
2. Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit
   $$\epsilon_m = \sum_{i=1}^{n}\left|\sigma_{i,i}^{(m+1)} - \sigma_{i,i}^{(m)}\right|.$$
   Vérifier que $R_{m+1} - R_m \geq 2\epsilon_m$. En déduire que la série $\left(\sum \epsilon_m\right)_{m\geq 1}$ est convergente.
3. On décompose $\Sigma^{(m)}$ en $\Sigma^{(m)} = D^{(m)} + E^{(m)}$ avec $D^{(m)}$ diagonale et $E^{(m)}$ à diagonale nulle.
   a. Montrer que $\left(D^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   b. Montrer que $\left(E^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.