Exercice 1.

1. Pour z et p dans $\mathcal{D}$, le module de de $\overline{p}z$ est strictement plus petit que 1 donc $1-\overline{p}z$ n'est pas nul. Pour la relation demandée ensuite, on utilise la formule de cours :
$$\forall (u,v)\in\mathbb{C}^2 : |u+v|^2 = |u|^2+|v|^2+2\operatorname{Re}(u\overline{v})$$
Il vient :
$$1-\left|\frac{p-z}{1-\overline{p}z}\right|^2 = \frac{1-|p|^2+2\operatorname{Re}(z(\overline{p}-\overline{p}))+(|\overline{p}|^2-1)|z|^2)}{|1-\overline{p}z|^2} = \frac{(1-|p|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{p}z|^2}$$
Pour z et p dans $\mathcal{D}$, les modules sont strictement plus petits que 1, donc l'expression du dessus est strictement positive ce qui signifie :
$$\forall (u,p)\in\mathcal{D}^2 : \frac{p-z}{1-\overline{p}z}\in\mathcal{D}$$

2. D'après la question précédente, pour $p\in\mathcal{D}$ fixé, l'application α_p est bien définie de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Pour montrer qu'elle est bijective, on va montrer que :
pour tout $w\in\mathcal{D}$, il existe un unique $z\in\mathcal{D}$ tel que $\alpha_p(z)=w$.
Considérons l'équation
$$\frac{p-z}{1-\overline{p}z}=w$$
d'inconnue z avec p et w des paramètres dans $\mathcal{D}$.
$$\frac{p-z}{1-\overline{p}z}=w \Leftrightarrow (1-\overline{p}w)z=p-w \Leftrightarrow z=\frac{p-w}{1-\overline{p}w}$$
car $1-\overline{p}w\neq 0$ du fait que w et p sont dans $\mathcal{D}$.
L'équation d'inconnue z admet donc une unique solution
$$\frac{p-w}{1-\overline{p}w}=\alpha_p(w)$$
Ceci montre que α_p est bijective est qu'elle est sa propre bijection réciproque.

3. L'équation proposée par l'énoncé est équivalente à
$$\overline{p}z^2-2z+p=0$$
Son discriminant est
$$\Delta = 4-4|p|^2 = 4(1-\sin^2\varphi = (2\cos\varphi)^2$$
On en déduit les racines de l'équation :
$$\frac{2+2\cos\varphi}{2(\sin\varphi)e^{-i\theta}} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}e^{i\theta} = (\operatorname{cotan}\frac{\varphi}{2})e^{i\theta}$$
et
$$\frac{2-2\cos\varphi}{2(\sin\varphi)e^{-i\theta}} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}e^{i\theta} = (\tan\frac{\varphi}{2})e^{i\theta}$$
De plus $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}[$ donc $\frac{\varphi}{2}\in[0,\frac{\pi}{4}[$ d'où
$$\tan\frac{\varphi}{2} < 1 < \operatorname{cotan}\frac{\varphi}{2}$$
Ainsi, une seule des deux solutions est dans $\mathcal{D}$. Il s'agit de
$$\tan\frac{\varphi}{2}e^{i\theta}$$
C'est un point fixe de α_p.

Problème.

Question de cours.

Réécrivons le birapport sous la forme d'un quotient de quotient :
$$[z_1,z_2,z_3,z_4] = \frac{\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}}{\dfrac{z_4-z_3}{z_4-z_2}} = K\frac{e^{i\alpha_1}}{e^{i\alpha_4}} = Ke^{i(\alpha_1-\alpha_4)}$$
où le réel $K>0$ est un quotient de modules. On en déduit que le birapport est réel si et seulement si
$$\alpha_1\equiv\alpha_4 \mod \pi$$

Partie I.

1. En utilisant la formule de cours pour le carré du module d'une somme de deux complexes, on obtient :
$$\begin{aligned}|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2 &= 2\operatorname{Re}\left(z(\overline{w}-w)\right) = -4\operatorname{Re}(zi\operatorname{Im}w)\\ &= -4\operatorname{Im}w\operatorname{Re}(iz) = 4\operatorname{Im}w\operatorname{Im}z>0\end{aligned}$$

Rémy Nicolai S0901C

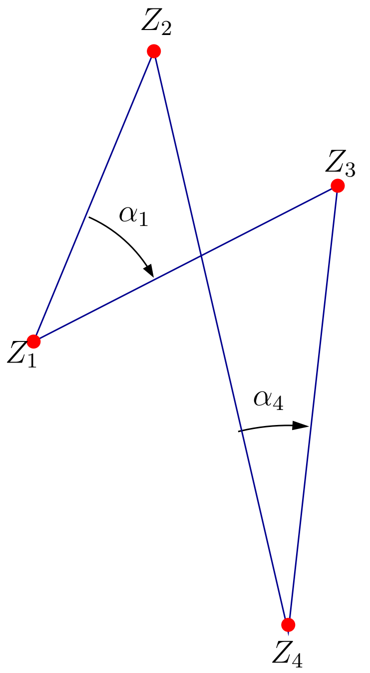

FIG. 1: Question de cours

car les deux parties imaginaires sont strictement positives. On en déduit

$$(|z-\overline{w}|-|z-w|)(|z+\overline{w}|+|z-w|) \Rightarrow \frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}$$

Ce qui permet de prendre le logarithme. De plus, évidemmment :

$$|z-\overline{w}|-|z-w| < |z-\overline{w}|+|z-w| \Rightarrow \frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|} < 1$$

Ce qui entraine $\Rightarrow \rho(z,w) > 0$.

2. Par définition du cosinus hyperbolique, comme exponentielle et logarithme se composent, il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(\rho(z,w)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}+\frac{|z-\overline{w}|-|z-w|}{|z-\overline{w}|+|z-w|}\right) \\
&= \frac{(|z-\overline{w}|+|z-w|)^2+(|z-\overline{w}|-|z-w|)^2}{2(|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2)} = \frac{|z-\overline{w}|^2+|z-w|^2}{4\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z} \\
&= \frac{|z|^2+|w|^2-\operatorname{Re}(zw)-\operatorname{Re}(z\overline{w})}{2\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z} = \frac{|z|^2+|w|^2-2\operatorname{Re} z\operatorname{Re} w}{2\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z} \\
&= \frac{2\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z+|z|^2+|w|^2-2\operatorname{Re} z\operatorname{Re} w-2\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z}{2\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z} \\
&= 1+\frac{|z|^2+|w|^2-2\operatorname{Re}(z\overline{w})}{2\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z}
\end{aligned}$$

Ce qui donne la formule demandée.

$$\operatorname{ch}(\rho(z,w)) = 1+\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z}$$

3. Exprimons $\operatorname{ch} t$ en fonction de $\operatorname{sh}\frac{t}{2}$.

$$\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right) = \frac{1}{2}\left((e^{\frac{t}{2}})^2+(e^{-\frac{t}{2}})^2\right) = \frac{1}{2}\left((e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}})^2-2\right) = 2\left(\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)^2+1$$

On en déduit

$$\left(\operatorname{sh}\frac{\rho(z,w)}{2}\right)^2 = \frac{|z-w|^2}{4\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z}$$

Comme on a vu que $\rho(z,w) > 0$, le sh est aussi strictement positif et

$$\operatorname{sh}\frac{\rho(z,w)}{2} = \frac{|z-w|}{\sqrt{\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z}}$$

Utilisons encore une fois la formule trouvée au début

$$|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2 = 4\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z \Leftrightarrow \frac{|z-\overline{w}|^2}{4\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z}-\left(\operatorname{sh}\frac{\rho(z,w)}{2}\right)^2 = 1$$

On en déduit

$$\left(\operatorname{ch}\frac{\rho(z,w)}{2}\right)^2 = 1+\left(\operatorname{sh}\frac{\rho(z,w)}{2}\right)^2 = \frac{|z-\overline{w}|^2}{4\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z} \Rightarrow \operatorname{ch}\frac{\rho(z,w)}{2} = \frac{|z-\overline{w}|}{\sqrt{\operatorname{Im} w\operatorname{Im} z}}$$

car un ch est toujours positif (≥ 1).
La formule
$$\operatorname{th}\frac{\rho(z,w)}{2} = \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|$$
s'obtient à partir des résultats précédents par la définition de th comme quotient de sh par ch.

Partie II.

1. Pour trouver la partie imaginaire demandée, multiplions en haut et en bas par le conjugué du dénominateur sans écrire tout ce qui est clairement réel
$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{adz+bc\overline{z}}{|cz+d|^2}\right) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$
Cette quantité est strictement positive lorsque $\operatorname{Im} z$ est strictement positive.
2. a. L'application $z \to z-u$ est bien de la forme indiquée avec $a=1$, $b=-u$, $c=0$, $d=1$.
L'application $z \to \frac{1}{u-z}$ est bien de la forme indiquée avec $a=0$, $b=1$, $c=-1$, $d=u$.

   b. On adéjà trouvé l'expression à la première question :
$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

   c. On obtient une expression simple (et factorisée) en réduisant $h(z)_h(w)$ au même dénominateur
$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{bcw+adz-bcz-adw}{(cz+d)(cw+d)} = \frac{(ad-bc)(z-w)}{(cz+d)(cw+d)}$$

   d. Comme la fonction th est injective car strictement croissante, il suffit de montrer l'égalité entre les th des demi-distances :
$$\begin{aligned}\operatorname{th}\frac{\rho(h(z),h(w))}{2} &= \left|\frac{h(z)-h(w)}{h(z)-h(\overline{w})}\right| = \left|\frac{(ad-bc)(z-w)(cz+d)(c\overline{w}+d)}{(cz+d)(cw+d)(ad-bc)(z-\overline{w})}\right| \\ &= \left|\frac{(z-w)(c\overline{w}+d)}{(cw+d)(z-\overline{w})}\right| = \left|\frac{(z-w)}{(z-\overline{w})}\right| = \operatorname{th}\frac{\rho(z,w)}{2}\end{aligned}$$
car $c\overline{w}+d$ et $cw+d$ sont conjugués donc de même module.

   e. De même pour le birapport des images, les $ad-bc$ se simplifient :
$$\begin{aligned}[h(z_1),h(z_2),h(z_3),h(z_4)] &= \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)(cz_1+d)(cz-2+d)(cz_3+d)(cz_4+d)}{(cz_1+d)(cz_3+d)(cz_2+d)(cz_4+d)(z_1-z_2)(z_3-z_4)} \\ &= \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)} = [z_1,z_2,z_3,z_4]\end{aligned}$$

Partie III.

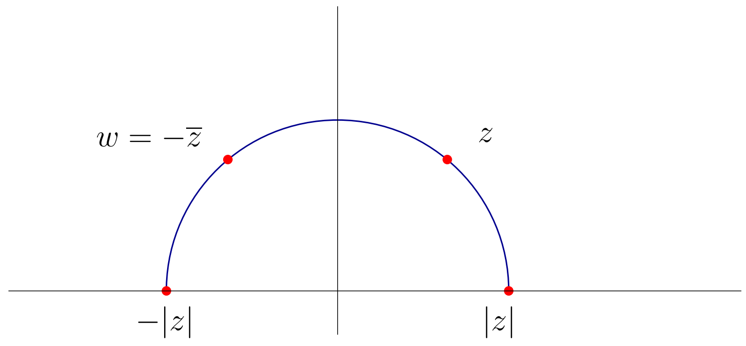

FIG. 2: Cercle pour la question III.1

1. Dans ce cas particulier, $w=-\overline{z}$. Calculons le birapport :
$$[-|z|,-\overline{z},z,|z|] = \frac{(-|z|-z)(-\overline{z}-|z|)}{(-|z|+\overline{z})(z-|z|)} = \frac{||z|+z|^2}{|z-|z||^2} = \frac{2|z|^2+2|z|\operatorname{Re} z}{2|z|^2-2|z|\operatorname{Re} z} = \frac{|z|+\operatorname{Re} z}{|z|-\operatorname{Re} z}$$
Or, si $w=-\overline{z}$,
$$\rho(-\overline{z},z) = \ln\left(\frac{2|z|+|z-\overline{z}|}{2|z|-|z-\overline{z}|}\right) = \frac{|z|+\operatorname{Re} z}{|z|-\operatorname{Re} z}$$
car la partie réelle de z étant supposée positive, $|z-\overline{z}| = 2\operatorname{Re} z$. On en déduit bien la formule
$$\rho(-\overline{z},z) = \ln([|z-\overline{z}|])$$
2. Dans le cas particulier où les parties imaginaires sont égales, le principe est d'utiliser une translation pour se ramener au cas précédent puis la conservation de la distance

et du birapport par ce type de transformation (II.2.a d e)
On définit une transformation h

$$h : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ c \to c - \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z+w) \end{cases}$$

Les points d'affixes $h(z)$ et $h(w)$ sont alors symétriques par rapport à la droite des imaginaires purs. En revanche, il n'est pas certain que la partie réelle de z soit strictement positive. On peut permuter les deux points car

$$[z_4, z_3, z_2, z_1] = \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)} = [z_1, z_2, z_3, z_4] \text{ et } \rho(w,z) = \rho(z,w)$$

On peut donc écrire (en supposant $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} w$) :

$$\begin{aligned} \rho(w,z) = \rho(h(w), h(z)) &= \ln([(h(w))^*, h(w), h(z), (h(z))^*]) \\ &= \ln([h(w^*), h(w), h(z), h(z^*)]) \end{aligned}$$

car il est évident que la configuration géométrique de la figure 1 est conservée par translation. Comme le birapport est également conservé :

$$\ln([h(w^*), h(w), h(z), h(z^*)]) = \ln([w^*, w, z, z^*])$$

3. L'équation proposée (d'inconnue u) est équivalente à :

$$\begin{aligned} &(u+x)^2 y + yy'^2 = (u-x)^2 y' + y^2 y' \\ &\Leftrightarrow (y - y')u^2 + 2x(y+y')u + x^2 y + yy'^2 - x^2 y' - y^2 y' = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = 4(y+y')^2 x^2 - 4(y-y')\left[x^2 y + yy'^2 - x^2 y' - y^2 y'\right]$$

De plus,

$$\begin{aligned} (y+y')^2 &= (y-y')^2 + 4yy' \\ x^2 y + yy'^2 - x^2 y' - y^2 y' &= x^2(y-y') + yy'(y'-y) = (y-y')(x^2 - yy') \end{aligned}$$

Cela permet de simplifier le discriminant :

$$\Delta = 4(y-y')^2 x^2 + 16yy'x^2 - 4(y-y')^2(x^2 - yy') = 4yy'(4x^2 + (y-y')^2)$$

4. Le principe cette fois est d'utiliser une transformation

$$c \to \frac{1}{u-c}$$

avec un u choisi pour se ramener au cas particulier précédent. L'existence de ce u vient de la positivité d'un discriminant obtenu grâce à la question précédente.
Plus précisément, dans le cas particulier où $\operatorname{Re} w = -\operatorname{Re} z$, posons

$$x = \operatorname{Re} z = -\operatorname{Re} w \qquad y = \operatorname{Im} z \qquad y' = \operatorname{Im} w$$

Montrons l'existence d'un réel u tel que

$$\operatorname{Im}(h(w)) = \operatorname{Im}(h(z)) \text{ avec } h : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ c \to \frac{1}{u-c} \end{cases}$$

Comme la partie imaginaire de $h(c)$ est

$$\frac{\operatorname{Im} c}{|u-c|^2}$$

On obtient que u est tel que $\operatorname{Im}(h(z)) = \operatorname{Im}(h(w))$ si et seulement si :

$$\frac{\operatorname{Im} z}{|u-z|^2} = \frac{\operatorname{Im} w}{|u-w|^2} \Leftrightarrow \frac{y}{(u-x)^2 + y^2} = \frac{y'}{(u+x)^2 + y'^2}$$

Cette équation est équivalent à une équation du second degré de discriminant

$$4yy'(4x^2 + (y-y')^2) > 0$$

car les parties imaginaires sont strictement positives (on est dans le demi-plan de Poincaré). Il existe donc un réel u tel que $h(z)$ et $h(w)$ aient la même partie imaginaire.Alors :

$$\rho(w,z) = \rho(h(w), h(z)) = \ln([(h(w))^*, h(w), h(z), (h(z))^*])$$

Il faudrait prendre le temps de vérifier que la configuration géométrique de la figure 1 est transportée par h. L'image par h du demi-cercle passant w, z et centré sur l'axe réel est bien un demi cercle passant par $h(w)$ et $h(z)$. Son intersection avec l'axe réel est formé par les points $h(w)^* = h(w^*)$ et $h(z)^* = h(z^*)$. Un petit calcul est nécéssaire ainsi que la remarque que l'axe réel est globalent conservé par h. À la fin d'un problème

bien long, on peut se permettre de l'affirmer sans le vérifier.
On poursuit donc en utilisant la conservation du birapport

$$\rho(w,z) = \rho(h(w),h(z)) = \ln([h(w^*),h(w),h(z),h(z^*)]) = \ln([w^*,w,z,z^*])$$

On obtient enfin le résultat dans le cas général en raisonnant comme en 2. avec une translation le long de l'axe réel.

Exercice 2.

1. Comme $j \neq 1$ et $j^3 = 1$, la factorisation

$$(z^3-1) = (z-1)(z^2+z+1)$$

montre que j est une racine de $z^2+z+1=0$. Les racines de cette équation sont

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De plus d'après l'étude de sin, comme $\frac{2\pi}{3} \in]0,\pi[$, la partie imaginaire de j est strictement positive donc

$$j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Le discriminant de cette équation est $-1 = (i)^2$, les solutions sont

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

avec les conditions imposées sur les parties imaginaires. On remarque que z_2 est obtenu à partir de j en permutant les parties réelles et imaginaires. On en déduit qu'un argument de z_2 est $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$. Comme z_1 est le conjugué de z_2, un argument est $\frac{\pi}{6}$.
On en déduit le placement des points M_1 et M_2 sur la figure 3.

3. Par définition,

$$z_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{-i\pi}{6}} = e^{\frac{3i\pi}{6}} = i$$

On place M_3 sur la figure 3.

4. D'après la définition, l'affixe de M_4 est

$$z_4 = z_2 - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = -i$$

On place le point M_4 sur la figure 3.

5. D'après les définitions :

$$z_5 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i) = -z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}+\pi} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$
$$z_6 = \frac{2(-i-\sqrt{3})}{1+3} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = -z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}-\pi} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

On en déduit le placement des points M_5 et M_6 sur la figure 3.

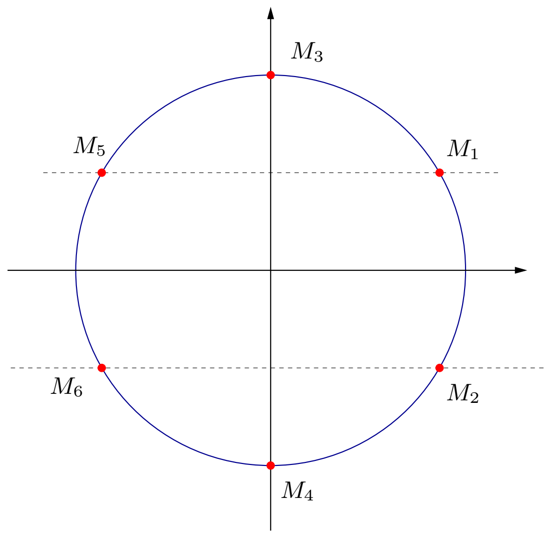

FIG. 3: Les points sur le cercle unité

6. On a obtenu finalement :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad z_3 = i, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_6 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

On remarque que $z_2 = \overline{z_1}$, $z_4 = \overline{z_3}$, $z_6 = \overline{z_5}$. D'autre part :

$$(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta}) = z^2 - 2\cos\theta + 1$$

On obtient donc :

$$\prod_{k=1}^{6}(z-z_k) = (z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)$$
$$= \left((z^2+1)^2 - 3z^2\right)(z^2+1) = (z^4-z^2+1)(z^2+1) = z^6+1$$

On en déduit que l'ensemble des racines sixièmes de -1 est

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$$