Exercice 1.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres complexes de module strictement plus petit que 1.

1. Montrer que, pour des éléments p et z quelconques de $\mathcal{D}$, le nombre complexe $1-\overline{p}z$ est non nul et :
$$1-\left|\frac{p-z}{1-\overline{p}z}\right|^2=\frac{(1-|z|^2)(1-|p|^2)}{|1-\overline{p}z|^2}$$
Que peut-on en déduire pour
$$\frac{p-z}{1-\overline{p}z}$$
2. Pour tout $p\in\mathcal{D}$, on considère l'application α_p
$$\begin{cases}\mathcal{D}\rightarrow\mathcal{D}\\ z\rightarrow\dfrac{p-z}{1-\overline{p}z}\end{cases}$$
Montrer que cette application est bijective. Quelle est sa bijection réciproque ?
3. On suppose ici que
$$p=(\sin\varphi)e^{i\theta} \text{ avec } \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}[\text{ et } \theta\in]-\pi,\pi]$$
Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes z tels que
$$\frac{p-z}{1-\overline{p}z}=z$$
Un seul de ces nombres est dans $\mathcal{D}$, préciser lequel.

Problème.

Un plan est muni d'un repère orthonormé. L'affixe complexe d'un point du plan est relative à ce repère.
Le *demi-plan de Poincaré* est formé par les points dont l'affixe est de partie imaginaire strictement positive. On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive.
Le *birapport* de quatre nombres complexes deux à deux distincts z_1, z_2, z_3, z_4 est noté $[z_1,z_2,z_3,z_4]$, il est défini par :
$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$
Pour tous éléments éléments z et w de $\mathcal{H}$, on définit le réel $\rho(z,w)$ appelé *distance hyperbolique*[1] par :
$$\rho(z,w)=\ln\left(\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right)$$

Question de cours.

On considère quatre points deux à deux distincts Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4. Soit α_1 une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{Z_1Z_2},\overrightarrow{Z_1Z_3})$ et α_4 une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{Z_4Z_2},\overrightarrow{Z_4Z_3})$.
Traduire sur ces angles la condition
$$[z_1,z_2,z_3,z_4]\in\mathbb{R}$$
Ce résultat ne sera pas utilisé dans le suite de ce problème.

Partie I. Expressions de la distance hyperbolique.

1. Montrer que pour tous z et w dans $\mathcal{H}$, le réel $|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2$ est strictement positif. Expliquez pourquoi cela permet la définition de $\rho(z,w)$ avec $\rho(z,w)>0$.
2. Montrer que pour tous z et w dans $\mathcal{H}$,
$$\operatorname{ch}(\rho(z,w))=1+\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}$$
3. Montrer les formules suivantes pour tous z et w dans $\mathcal{H}$:
$$\operatorname{sh}(\frac{\rho(z,w)}{2})=\frac{|z-w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}}\qquad \operatorname{ch}(\frac{\rho(z,w)}{2})=\frac{|z-\overline{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}}$$
En déduire
$$\operatorname{th}(\frac{\rho(z,w)}{2})=\frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}$$

Partie II. Homographies de $\mathcal{H}$.

1. Soient a, b, c, d des réels tels que $ad-bc>0$. Pour tous $z\in\mathcal{H}$, montrer que
$$\frac{az+b}{cz+d}$$

[1] d'après *The Geometry of Discrete Groups* (Springer) p130

est bien défini et exprimer simplement sa partie imaginaire en fonction de $\operatorname{Im} z$, $ad-bc$, $|cz+d|$.
En déduire
$$z \in \mathcal{H} \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$$

2. Pour a, b, c, d des réels tels que $ad-bc>0$, on note h l'application
$$\begin{cases} \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ z \to h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$
   a. Soit u un réel. Les transformations
   $$z \to z-u \text{ et } z \to \frac{1}{u-z}$$
   sont-elles de cette forme ? Si oui préciser des a, b, c, d possibles.
   b. Pour z dans $\mathcal{H}$, exprimer simplement $\operatorname{Im} h(z)$ en fonction de $ad-bc$, $\operatorname{Im} z$, $|cz+d|$.
   c. Pour z et w dans $\mathcal{H}$, exprimer simplement $h(z)-h(w)$ en fonction de $ad-bc$, $z-w$, $cz+d$, $cw+d$.
   d. Pour z et w dans $\mathcal{H}$, montrer que
   $$\rho(h(z),h(w)) = \rho(z,w)$$
   e. Pour z_1, z_2, z_3, z_4 deux à deux distincts dans $\mathcal{H}$, montrer que $h(z_1)$, $h(z_2)$, $h(z_3)$, $h(z_4)$ sont deux à deux distincts avec
   $$[h(z_1),h(z_2),h(z_3),h(z_4)] = [z_1,z_2,z_3,z_4]$$

Partie III. Distance hyperbolique et birapport.

Soient Z et W deux points dans le demi-plan de Poincaré dont les abscisses sont différentes. Les affixes sont respectivement z et w. Elles appartiennent à $\mathcal{H}$ avec :
$$\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w \qquad \operatorname{Im} z > 0 \qquad \operatorname{Im} w > 0$$
Il existe un unique cercle centré sur l'axe des x et passant par Z et W. On note z^* et w^* les affixes des points d'intersection de ce cercle avec l'axe des x comme sur la figure.
On veut montrer que
$$\rho(z,w) = \ln([w^*,w,z,z^*])$$

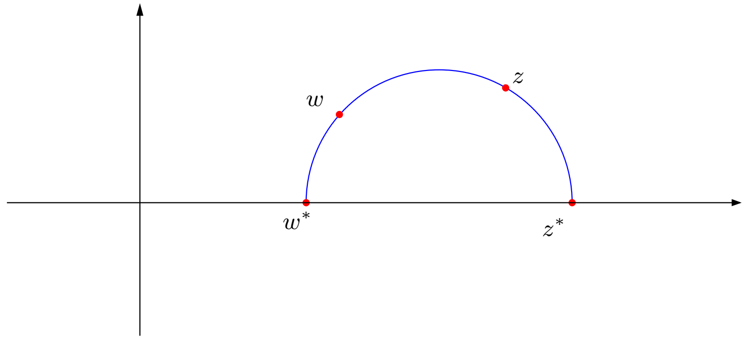

FIG. 1: Partie III. cercle passant par W et Z

1. Cas particulier. On suppose que $\operatorname{Re} z > 0$ et que W est le symétrique de Z par rapport à l'axe des y. Comment s'exprime alors l'affixe w en fonction de z ? Vérifier la formule dans ce cas.
2. Cas particulier. On suppose maintenant seulement que
$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z$$
Montrer la formule dans ce cas.
3. Soient x, y, x' des réels tels que $x \neq 0$, $y > 0$, $y' > 0$.
Montrer que l'équation d'inconnue u
$$\frac{y}{(u-x)^2+y^2} = \frac{y'}{(u+x)^2+y'^2}$$
est équivalente à une équation du second degré en u dont le discriminant est
$$4yy'(4x^2+(y-y')^2)$$
4. Montrer la formule dans le cas particulier où $\operatorname{Re} w = -\operatorname{Re} z$. En déduire la formule dans le cas général.

Exercice 2.

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$.
Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 que l'on va calculer seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

1. (*Question de cours*) Démontrer l'expression algébrique de $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
2. Résoudre l'équation
$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$
Soit z_1 la solution de partie imaginaire positive et z_2 l'autre. Exprimer z_1 et z_2 sous forme algébrique et trigonométrique. Placer les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2.
3. Soit M_3 l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Placer M_3 sur la même figure et calculer son affixe notée z_3.
4. Soit M_4 l'image de M_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ dont l'affixe est
$$-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$
Placer le point M_4 sur la même figure et calculer son affixe z_4.
5. Soit
$$z_5 = \frac{i}{2}(1 + i\sqrt{3}) \qquad z_6 = \frac{2}{i - \sqrt{3}}$$
Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et exponentielle. Placer les points M_5 et M_6 d'affixes z_5 et z_6 sur la figure.
6. Développer
$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$$
en regroupant d'abord les z_k conjugués. Développer encore pour obtenir une expression très simple. Quel est l'ensemble
$$\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}?$$