Exercice 1.

1. Considérons l'application φ définie dans $\mathbb{R}$ par
$$\varphi(t) = A(t+T) - A(t)$$
Elle est dérivable avec
$$\varphi'(t) = A'(t+T) - A'(t) = a(t+T) - a(t) = 0$$
car a est T-périodique. On en déduit que φ est constante d'où
$$\forall t \in \mathbb{R} : A(t+T) - a(t) = \varphi(t) = \varphi(0) = A(T) - A(0)$$
2. L'existence et l'unicité demandée sont une application résultat de cours sur l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation linéaire du premier ordre.
3. On procède par analyse-synthèse.
Analyse-Unicité. Si y_1 de se décompose en
$$\forall t \in \mathbb{R} : y_1(t) = p(t)e^{Kt}$$
avec K nombre réel et p fonction T-périodique. En prenant la valeur en 0 et en T, il vient :
$$\begin{aligned} 1 = p(0) \text{ et } e^{A(0)-A(T)} &= p(T)e^{KT} \\ p(0) = p(T) \Rightarrow e^{A(0)-A(T)} &= e^{KT} \end{aligned}$$
D'après l'injectivité de l'exponentielle réelle, on obtient
$$K = -\frac{1}{T}(A(T) - A(0))$$
Ceci assure l'unicité de K mais aussi de la fonction p, car on doit avoir :
$$\forall t \in \mathbb{R} : p(t) = y_1(t)e^{-Kt}$$
Synthèse-Existence. Définissons un nombre K et une fonction p par :
$$K = -\frac{1}{T}(A(T) - A(0)) \qquad \forall t \in \mathbb{R} : p(t) = y_1(t)e^{-Kt} = e^{A(0)-A(t)-Kt}$$
alors par définition même, on a bien
$$\forall t \in \mathbb{R} : y_1(t) = p(t)e^{Kt}$$
Le seul point à vérifier, c'est la périodicité de p. Pour tout réel t :
$$p(t+T) = e^{A(0)-A(t+T)-Kt-KT} = e^{-A(t+T)+A(T)-Kt}$$
en utilisant la définition de K. On utilise alors la question 1. :
$$\begin{aligned} A(t+T) - A(t) = A(T) - A(0) &\Rightarrow -A(t+T) + A(T) = -A(t) + A(0) \\ &\Rightarrow p(t+T) = e^{-A(t)+A(0)-Kt} = p(t) \end{aligned}$$
4. D'après le cours, pour toute solution z de (1), il existe un réel λ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R} : z(t) = \lambda y_1(t)$$
En particulier pour $t = 0$, on obtient $\lambda = z(0)$.
Lorsque $K < 0$, comme toute fonction continue périodique est bornée, la fonction exponentielle fait tendre vers 0 en $+\infty$. Toute solution de (1) converge vers 0 en $+\infty$.
On peut noter que K est l'opposée de la *valeur moyenne* de la fonction périodique a.

Exercice 2.

Partie I.

1. On se conforme aux indications de l'énoncé en introduisant une fonction u, puis en exprimant z puis ses dérivées en fonction des dérivées de u. On multiplie à chaque étape par une exponentielle. On obtient
$$\begin{aligned} u(t) &= z(e^t)e^{-\frac{t}{2}} \\ z(e^t) &= u(t)e^{\frac{t}{2}} && \times\frac{A}{4e^{2t}} = a(e^t) \\ e^t z'(e^t) &= u'(t)e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}u(t)e^{\frac{t}{2}} \\ z'(e^t) &= u'(t)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{t}{2}} \\ e^t z''(e^t) &= u''(t)e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{4}u(t)e^{-\frac{t}{2}} \\ z''(e^t) &= u''(t)e^{-\frac{3t}{2}} - \frac{1}{4}u(t)e^{-\frac{3t}{2}} && \times 1 \end{aligned}$$

Écrivons ensuite la relation différentielle vérifiée par z en e^t qui est bien dans I. La colonne de droite dans le calcul précédent indique les coefficients par lesquels on multiplie. On obtient

$$0 = u''(t)e^{-\frac{3t}{2}} - \frac{1}{4}u(t)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{A}{4}u(t)e^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow u''(t) + \frac{A-1}{4}u(t) = 0$$

L'équation cherchée est donc

$$y'' + \frac{A-1}{4}y = 0 \qquad (2)$$

L'intérêt de ce calcul est d'obtenir une équation différentielle à coefficients constants à partir d'une équation dont les coefficients n'étaient pas constants.

2. Pour toutes les valeurs de A, l'ensemble des solutions de (2) est de la forme

$$\left\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

L'expression des fonctions de la base (u_1, u_2) dépend des valeurs de A.
Cas $A < 1$

$$u_1(t) = e^{-kt} \qquad u_2(t) = e^{kt} \qquad \text{avec } k = \frac{1}{2}\sqrt{1-A}$$

On pourait aussi choisir

$$u_1(t) = \mathrm{ch}(kt) \qquad u_2(t) = \mathrm{sh}(kt) \qquad \text{avec } k = \frac{1}{2}\sqrt{1-A}$$

Cas $A = 1$.

$$u_1(t) = 1 \qquad u_2(t) = t$$

Cas $A > 1$.

$$u_1(t) = \cos(\omega t) \qquad u_2(t) = \sin(\omega t) \qquad \text{avec } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{A-1}$$

3. D'après la question 1., si z est une solution de (1) alors u est solution de (2) avec

$$\forall t \in \mathbb{R} : u(t) = z(e^t)e^{-\frac{t}{2}}$$

Mais on connait la forme des solutions de (2) et on peut exprimer z en fonction de u

$$\forall x > 0 : z(x) = u(\ln x)\sqrt{x}$$

On peut donc former des fonctions y_1, y_2 à partir de u_1 et u_2. Il convient de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions de (1). Ce calcul qui ne présente pas de problème n'est pas présenté ici. On en déduit que l'ensemble des solutions de (1) est

$$\left\{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

L'expression des fonctions y_1 et y_2 dépend des valeurs de A.
Cas $A < 1$.

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}-k} \qquad y_2(x) = x^{\frac{1}{2}+k} \qquad \text{avec } k = \frac{1}{2}\sqrt{1-A}$$

Cas $A = 1$.

$$y_1(x) = \sqrt{x} \qquad y_2(x) = \sqrt{x}\ln x \qquad \text{avec } k = \frac{1}{2}\sqrt{1-A}$$

Cas $A > 1$.

$$y_1(t) = \sqrt{x}\cos(\omega \ln x) \qquad y_2(t) = \sqrt{x}\sin(\omega \ln x) \qquad \text{avec } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{A-1}$$

Partie II.

1. On procède comme dans la partie I.. On note u la nouvelle fonction et on exprime z en fonction de u pour pouvoir utiliser l'équation de départ. Une exponentielle se met en facteur.

$$\begin{array}{rl}
 & u(x) = z(x)e^{\frac{1}{2}P(x)} \\
q(x)\times & z(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}P(x)} \\
p(x)\times & z'(x) = \left(u'(x) - \frac{1}{2}u(x)p(x)\right)e^{-\frac{1}{2}P(x)} \\
1\times & z''(x) = \left(u''(x) - p(x)u'(x) - \frac{1}{2}u(x)p'(x) + \frac{1}{4}u(x)p^2(x)\right)e^{-\frac{1}{2}P(x)}
\end{array}$$

Quand on combine avec les coefficients de la colonne de gauche, les termes en u' diparaissent. On obtient

$$0 = u''(x) + (-\frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 + q)u(x)$$

La fonction u est donc bien solution d'une équation

$$y'' + vy = 0 \text{ avec } v = -\frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 + q$$

L'intérêt de cette question est de fournir une méthode permettant d'obtenir une nouvelle équation sans terme en y'.

2. Dans le cas particulier de cette question, les calculs conduisent à :
$$v = 1 + \frac{A}{4x^2} \text{ avec } A = 1 - 4\lambda^2$$
On retombe donc sur une équation analogue à l'équation (1) de la partie I.

Exercice 3.

1. Les solutions du polynôme caractéristique $P = 3z^2+4z+1 = 3(z+1)(z+\frac{1}{3})$ sont -1 et $-\frac{1}{3}$. La forme générale d'une solution de l'équation sans second membre est
$$t \to \lambda e^{-t} + \mu e^{-\frac{1}{3}t}$$
Le second membre est la partie imaginaire de $e^{(-1+i)t}$. Pour ce second membre, une solution particulière est $Ae^{(-1+i)t}$ avec
$$A = \frac{1}{P(-1+i)} = \frac{1}{3i(i-\frac{2}{3})} = \frac{1}{13}(-3+2i)$$
En prenant la partie imaginaire, on obtient que la forme générale d'une solution pour l'équation proposée par l'énoncé est
$$t \to \lambda e^{-t} + \mu e^{-\frac{1}{3}t} + (-3\sin t + 2\cos t)\frac{e^{-t}}{13}$$
Les conditions imposées se traduisent par
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu + \frac{2}{13} & = & 1 \\ -\lambda - \frac{1}{3}\mu - \frac{5}{13} & = & 0 \end{array} \right.$$
La solution cherchée est finalement
$$t \to -e^{-t} + \frac{24}{13}e^{-\frac{1}{3}t} + (-3\sin t + 2\cos t)\frac{e^{-t}}{13}$$

2. L'équation caractéristique s'écrit $(z+1)^2 = 0$, elle admet une racine double -1. Le second membre est la partie réelle de $te^{(1+i)t}$. Comme $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution de l'équation differentielle complète sous la forme
$$t \to (At+B)e^{\lambda t}$$
(en posant $\lambda = 1+i$). En remplaçant dans l'équation on obtient
$$A = \frac{1}{(\lambda+1)^2}, \quad B = -\frac{2A}{\lambda+1} = -\frac{2}{(\lambda+1)^2}$$
On en déduit
$$A = \frac{1}{25}(3-4i), \quad B = \frac{2}{125}(-2+11i)$$
La solution particulière cherchée est la partie réelle de la solution $(At+B)e^{\lambda t}$. On en déduit finalement que l'ensemble des solutions demandé est
$$\left\{ (At+B)e^{-t} + \frac{e^t}{125}((15t-4)\cos t + (20t-22)\sin t), (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 4.

1. La fonction continue ressemble à un wronskien. Il faut faire tout de même attention que les deux fonctions ne sont pas solutions de la même équation différentielle.
$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = (p-q)y_1y_2$$

2. Raisonnons par l'absurde. Si la proposition est vraie, d'après les autres hypothèses (sur p, q et y_2), $W'(x)$ est strictement positif dans $]a,b[$. Le théorème du tableau de variations entraîne alors que W est *strictement croissante* dans $[a,b]$. Ceci est en contradiction avec :
$$W(a) = y_1(a)y_2'(a) \geq 0 \qquad W(b) = y_1(b)y_2'(b) \leq 0$$
En effet, l'énoncé nous indique $y_2'(a) \geq 0$, $y_2'(b) \leq 0$ et, par continuité,
$$\forall x \in]a,b[, \quad y_1(x) > 0 \Rightarrow (y_1(a) \geq 0 \text{ et } y_1(b) \geq 0)$$

3. La question précédente a montré qu'une solution y_1 de (1) ne pouvait pas rester strictement positive dans $]a,b[$. Elle ne peut pas non plus rester strictement négative car la fonction $-y_1$ serait alors une solution restant strictement positive. Par conséquent une solution de (1) doit prendre des valeurs des deux signes. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, une telle fonction continue doit s'annuler. Toute solution de (1) doit donc s'annuler entre deux zéros de y_1 vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

4. Lorsque p est une fonction minorée comme l'énoncé l'indique, on peut considérer deux équations différentielles :

$$y'' + py = 0 \qquad (1)$$
$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (2)$$

On peut appliquer les résultats des questions précédentes à une solution z quelconque de (1) et à la solution y_2

$$y_2(t) = \sin(\omega t)$$

de l'équation (2). Prenons en particulier un entier naturel k et

$$a = 2k\frac{\pi}{\omega} \qquad b = (2k+1)\frac{\pi}{\omega}$$

La fonction y_2 est strictement positive dans $]a, b[$ donc la fonction $y_1 = z$ prend au moins une fois la valeur 0 dans cet intervalle. Comme il en est de même dans tous les intervalles (deux à deux disjoints) obtenus en faisant varier k, on a bien démontré que toute solution de (1) admet une infinité de zéros.