Exercice 1.

Soit T un nombre réel strictement positif et a une fonction continue et T-périodique c'est à dire vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} : a(t+T) = a(t)$$

On note A une primitive[1] de a et on considère l'équation différentielle où l'inconnue y est une fonction à valeurs réelles

$$y' + ay = 0 \qquad (1)$$

1. Montrer que pour tout réel t,

$$A(t+T) - A(t) = A(T) - A(0)$$

2. Montrer qu'il existe une unique solution (notée y_1) de (1) prenant en 0 la valeur 1.
3. *Théorème de Floquet à l'ordre* 1.
Montrer qu'il existe un unique nombre réel K et une unique fonction T-périodique p tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} : y_1(t) = p(t)e^{Kt}$$

Préciser l'expression de K.
4. Montrer que toute solution z de (1) est de la forme

$$t \to z(0)p(t)e^{Kt}$$

Si $K < 0$, que peut-on en déduire pour le comportement de z en $+\infty$?

Exercice 2.

Partie I.

Soit A un nombre réel et a la fonction définie dans $I =]0, +\infty[$ par :

$$a(x) = \frac{A}{4x^2}$$

On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay = 0 \qquad (1)$$

d'inconnue une fonction y définie dans I.

[1] dans cet exercice, il est inutile d'utiliser des intégrales

1. Former une équation différentielle, qui sera notée (2), d'inconnue y telle que :

$$z \text{ solution de } (1) \Rightarrow t \to z(e^t)e^{-\frac{t}{2}} \text{ solution de } (2)$$

On pourra poser

$$u(t) = z(e^t)e^{-\frac{t}{2}}$$

et chercher à exprimer successivement $z(e^t)$, $z'(e^t)$, $z''(e^t)$ en fonction de $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$ et de fonctions exponentielles.
2. En discutant suivant le paramètre A, préciser l'ensemble des solutions de l'équation (3) :

$$y'' + \frac{A-1}{4}y = 0$$

3. En discutant suivant le paramètre A, préciser l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Partie II.

Soient p et q des fonctions continues de $I =]0, +\infty[$ et à valeurs réelles. Soit P la primitive de p nulle en 1 (aucune expression intégrale n'est nécessaire dans cet exercice). On considère l'équation différentielle (1) dont l'inconnue est une fonction y définie dans I :

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

1. Exprimer, à l'aide de p, p', q, une fonction v définie dans I et à valeurs réelles telle que

$$z \text{ solution de } (1) \Rightarrow x \to z(x)e^{\frac{1}{2}P(x)} \text{ solution de } (2)$$

où (2) est l'équation différentielle

$$y'' + vy = 0$$

2. Former, l'équation différentielle (2) associée à (1) comme dans la question précédente dans le cas particulier

$$p(x) = \frac{1}{x} \qquad q(x) = 1 - \frac{\lambda^2}{x^2} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

On trouvera une fonction v de la forme

$$v(x) = 1 + \frac{A}{4x^2}$$

pour un nombre réel A à préciser.

Rémy Nicolai S0902E

Exercice 3.

Dans cet exercice, la présentation de l'organisation des calculs intermédiaires est un élément important du barême.

1. Préciser l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$3y''(t) + 4y'(t) + y(t) = e^{-t} \sin t$$

Trouver la solution particulière z vérifiant $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$.

2. Former l'ensemble des solutions de

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = te^{t} \cos t$$

Exercice 4.

Soient p et q des fonctions continues dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles qui vérifient :

$$\forall x \in I : p(x) > q(x)$$

On considère des équations différentielles dont l'inconnue est une fonction y définie dans I.

$$y'' + py = 0 \qquad (1)$$
$$y'' + qy = 0 \qquad (2)$$

On se propose de prouver une certaine propriété *d'entrelacement des zéros* des solutions de ces équations.
On suppose qu'il existe une solution y_2 de (2) et des réels a, b tels que :

$$a < b \qquad y_2(a) = y_2(b) = 0 \qquad \forall x \in]a, b[: y_2(x) > 0$$

On admettra que ces propriétés entraînent $y_2'(a) \geq 0$ et $y_2'(b) \leq 0$.
Soit y_1 une solution de (1) et W la fonction définie par :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

1. Calculer et simplifier la dérivée de W.
2. Montrer que la proposition $(\forall x \in]a, b[: y_1(x) > 0)$ est fausse.
3. Montrer qu'il existe un $x \in]a, b[$ tel que $y_1(x) = 0$.
4. On considère un intervalle $I =]0, +\infty[$ et une fonction p continue de I dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel $\omega > 0$ tel que

$$\forall x \in I : p(x) > \omega^2$$

Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y'' + py = 0$$

admet une infinité de zéros (prend une infinité de fois la valeur 0).