Exercice 1.

PARTIE I

1. Remarquons d'abord que si $M = \Omega$, le produit scalaire de la deuxième condition est nul pour tout point M'. Dans ce cas, il n'existe aucun point vérifiant les conditions.
   Lorsque $M \neq \Omega$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est non nul, la condition d'alignement se traduit par l'existence d'un réel λ tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. La deuxième condition est réalisée si et seulement si
   $$\lambda = \frac{R^2}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}$$
   Il existe donc un unique point M' dans ce cas.
2. La question précédente montre que les relations proposées définissent une application Φ de $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ dans lui même. De plus dans cette définition, les points M et M' jouent des rôles symétriques. On en déduit que
   $$\Phi \circ \Phi = Id_{\mathcal{P}\setminus\{\Omega\}}$$
   Cette relation montre que Φ est bijective et égale à sa bijection réciproque.
3. Avec les définitions, il est bien clair que l'image d'un cercle de centre Ω et de rayon r est un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{R^2}{r}$.
4. L'image d'une droite passant par Ω et privée de Ω est elle même.
5. Comme les points sont alignés, il existe un λ réel tel que $z' - z_\Omega = \lambda(z - z_\Omega)$. Le produit scalaire donne alors :
   $$(\overrightarrow{OM}/\overrightarrow{OM'}) = \operatorname{Re}\overline{(z - z_\Omega)}\lambda(z - z_\Omega) = \lambda|z - z_\Omega|^2$$
   $$\Rightarrow z' = z_\Omega + \frac{R^2}{|z - z_\Omega|^2} = z_\Omega + \frac{R^2}{\overline{z - z_\Omega}}$$

PARTIE II

1. a. Comme l'affixe de Ω est 1, $z = 1$ si et seulement si $e^{i\theta} = 1$. L'ensemble A cherché est donc $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.
   b. D'après la question 5. l'affixe de $\Phi(M(\theta))$ est
   $$1 + \frac{1}{\frac{1 + e^{-i\theta}}{2} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{-i\theta} - 1} = \frac{e^{-i\theta} + 1}{e^{-i\theta} - 1} = i\,\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}$$

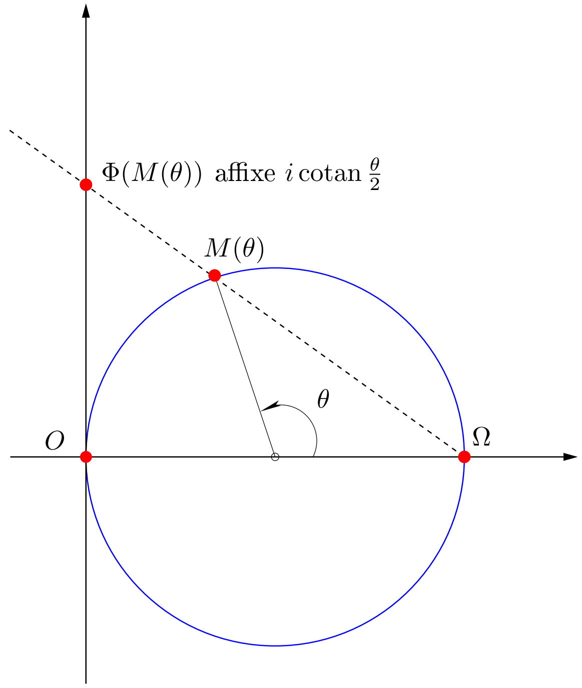

Fig. 1: Image du cercle de diamètre $[C\Omega]$

   c. Les points $M(\theta)$ d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta}$ décrivent le cercle de diamètre $[\Omega, O]$. L'image de ce cercle privé de Ω est donc formé par les points dont l'affixe a été calculée en b. Cette image est donc l'axe (Oy). Voir la figure 1.
   d. Comme Φ est sa propre bijection réciproque (involution), l'image de l'axe des ordonnées est le cercle de diamètre $[\Omega, O]$ privé de Ω.
2. a. On peut former l'équation réduite à partir de celle de l'énoncé.
   $$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$
   On en déduit que (E) est une ellipse d'axe focal (Ox) car $2 > \sqrt{3}$. La distance centre-sommet est $a = 2$. Le demi petit-axe est $b = \sqrt{3}$. Pour une ellipse, la distance centre-foyer est $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$. Les foyers sont donc les points F'

de coordonnées $(-1,0)$ et F de coordonnées $(1,0)$. L'excentricité $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. La distance centre-directrice est $\frac{a}{e}=4$. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x=4$ avec l'origine du repère en O centre de l'ellipse.

b. Tout point M de (E) est à gauche de $\mathcal{D}$. En utilisant des coordonnées polaires avec l'origine en F (et pas en O), on a donc

$$\begin{cases} d(M,F)=\rho \\ d(M,\mathcal{D})=3-\rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow d(M,F)=ed(M,\mathcal{D}) \Leftrightarrow 2\rho = 3-\rho\cos\theta$$

L'équation polaire de (E) est donc

$$\rho = \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$$

c. Dans cette question, Ω est le point F d'affixe 1. L'affixe d'un point de la représentation paramétrique de la question précédente est $\frac{3}{2+e^{i\theta}}e^{i\theta}$ l'affixe de son image est donc

$$\frac{1}{3}(2+\cos\theta)e^{i\theta}$$

Soit, en revenant en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{1}{3}(2+\cos\theta)$$

3. Attention, dans cette question, le pôle Ω est en O que n'est pas un foyer de l'hyperbole. Il est inutile de chercher une représentation polaire avec pôle au foyer. On peut écrire directement que l'équation polaire de (H) est

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta\,\cos\theta}}$$

Pour obtenir l'image, on inverse ρ et on multiplie par R^2. L'équation polaire de l'image de (H) est donc

$$\rho = 2\sqrt{\sin\theta\,\cos\theta}$$

Exercice 2.

1. a. Pour la symétrie par rapport à (Ox), chacune des distances à A et B est conservée car A et B sont sur l'axe de symétrie. La courbe (C) est donc conservée. Pour la symétrie par rapport à (Oy), les points A et B sont échangés. Lorsque $M\in(C)$ les distances sont échangées et le produit est conservé. La courbe (C) est donc conservée.

b. On écrit simplement les distances avec des coordonnées. Comme tout est positif, l'équation devient :

$$\begin{aligned} &\left((x-a)^2+y^2\right)\left((x+a)^2+y^2\right)=k^4 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+a^2-2ax\right)\left(x^2+y^2+a^2+2ax\right)=k^4 \\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=k^4 \end{aligned}$$

Il ne semble pas utile de développer.

c. Lorsqu'on passe en coordonnées polaires $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ avec $\rho>0$, l'équation devient

$$(\rho^2+a^2)^2-4a^2\rho^2\cos^2\theta=k^4$$

2. a. On peut former une équation du second degré en R qui redonne (E) lorsque l'on substitue ρ^2 à R.

$$(R+a^2)^2-4a^2R\cos\theta=k^4 \Leftrightarrow R^2+2a^2(1-2\cos^2\theta)R+a^4-k^4=0$$

On met finalement le trinôme sous la forme

$$(1) \qquad R^2-2a^2\cos 2\theta\, R+a^4-k^4=0$$

b. L'équation (1) admet deux solutions strictement positives (éventuellement confondues) si et seulement si
- le discriminant Δ est positif ou nul
- le produit P des racines est strictement positif (elles sont de même signe)
- la somme S des racines est strictement positive

Après calcul, on obtient donc un système de trois conditions.

$$\begin{cases} \Delta = 4(k^4-a^4\sin^2 2\theta)\geq 0 \\ P=a^4-k^4>0 \\ S=2a^2\cos 2\theta>0 \end{cases}$$

Comme a et k sont strictement positifs, la condition sur le produit donne $k<a$. Avec l'hypothèse $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, la condition sur la somme devient $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$. De plus

$\sin 2\theta \geq 0$ et la condition sur le discriminant devient $\sin 2\theta \leq \frac{k^2}{a^2}$. Finalement, les trois conditions se réduisent donc à deux :

$$\begin{cases} k < a \\ \theta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\arcsin \dfrac{k^2}{a^2}\right] \end{cases}$$

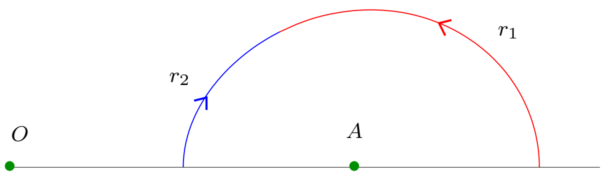

FIG. 2: Cas $a = 1$, $k = 0.9$. Courbes polaires r_1 et r_2.

c. Lorsque $k < a$, les θ pour lesquels le discriminant est positif sont entre 0 et $\frac{1}{2}\arcsin \dfrac{k^2}{a^2}$. Dans ce cas, le trinôme en R admet deux solutions positives

$$a^2\cos^2\theta + \sqrt{k^4 - a^4\sin^2 2\theta} \qquad a^2\cos^2\theta - \sqrt{k^4 - a^4\sin^2 2\theta}$$

La courbe $(\tilde{C})$ est donc le support des deux courbes paramétrées (voir figure 2) :

$$\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\arcsin\frac{k^2}{a^2}\right] : \quad \begin{cases} r_1(\theta) = \sqrt{a^2\cos 2\theta + \sqrt{k^4 - a^4\sin^2 2\theta}} \\ r_2(\theta) = \sqrt{a^2\cos 2\theta - \sqrt{k^4 - a^4\sin^2 2\theta}} \end{cases}$$

d. Dans le cas où $k > a$. Les droites de pente négatives ne coupent pas le quart de plan, elles ne peuvent donc pas couper la courbe. Pour les droites de pente positive on est ramené à l'éyude précédente.
Le produit des deux racines devient négatif, la somme reste positive et le discriminant est positif pour tous les θ. Le trinôme admet toujours deux racines mais une seule est positive. Il existe donc un seul point d'intersection. La courbe complète prend une forme de cacahuète.

3. a. Si $k = a$, le terme constant dans l'équation cartésienne disparait, on peut simplifier par r^2 et il reste (comme $r > 0$) :

$$r = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$$

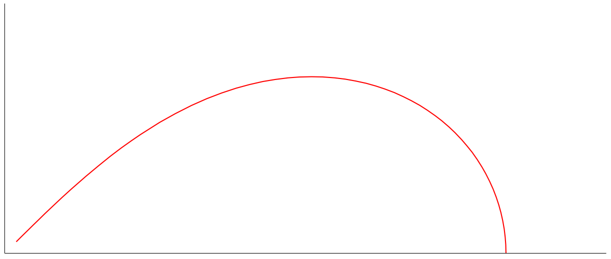

FIG. 3: Tracé d'un quart de lemniscate

Cette courbe est appelée *lemniscate*.

b. Si $k = a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la courbe paramétrée s'écrit

$$M(\theta) = O + \sqrt{\cos 2\theta}\,\overrightarrow{e}_\theta$$

La vitesse se factorise bien :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'}(\theta) &= -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\overrightarrow{e}_\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\,\overrightarrow{e}_{\theta+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\left(-\sin 2\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + \cos 2\theta\,\overrightarrow{e}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\left(\cos 2\theta\,\overrightarrow{e}_{\theta+\frac{\pi}{2}} + \sin 2\theta\,\overrightarrow{e}_{\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\overrightarrow{e}_{3\theta+\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

Examinons les symétries : $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'axe Ox et $M(\theta + \Pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à O.
On se limite donc au premier quart de plan. On doit alors avoir θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ pour assurer la positivité du $\cos 2\theta$. La fonction r décroît de 1 à 0. Les directions des tangentes se tracent facilement avec la formule du dessus. On remarque que la fonction n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$. La vitesse devient infinie mais le vecteur unitaire de sa direction tend vers $\overrightarrow{e}_{\frac{5\pi}{4}}$. Le tracé de ce quart de courbe est présenté en figure 3, il est à compléter par symétrie.

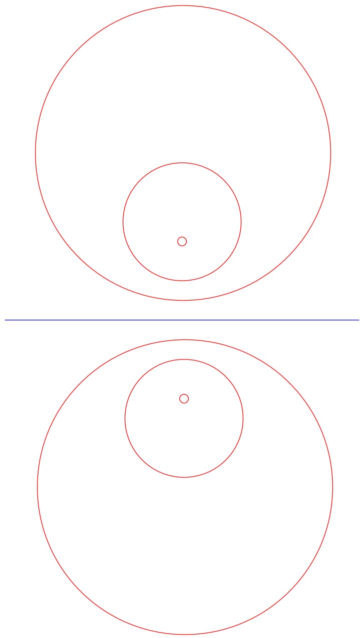

FIG. 4: Trajectoires de $z' = 1 + z^2$.

Problème

Partie 1. Nature des trajectoires

1. Si v est la valeur complexe d'une fonction constante solution de l'éqation différentielle, elle doit vérifier
$$1 + v^2 = 0$$
On en déduit qu'il existe deux solutions constantes, elles ont pour valeur $+i$ et $-i$.
2. La restriction à $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ de la fonction tan est solution de l'équation (1).
3. En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système
$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x' = 1 + x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$
4. On utilise encore les notations x et y de la question précédente.
$$\left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right)' = \frac{y'}{1+x^2+y^2} - \frac{2y(xx'+yy')}{(1+x^2+y^2)^2}$$
En multipliant les lignes de $(\mathcal{S})$ par x et y, on obtient :
$$xx' + yy' = x + x^3 + xy^2 = x(1+x^2+y^2) \Rightarrow \left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right)' = 0$$
5. Dans la question précédente, on a montré qu'une certaine expression était constante. Prenons sa valeur en 0.
$$\frac{y(t)}{1+x(t)+y(t)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \Leftrightarrow x^2(t) - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) y(t) + y^2(t) = -1$$
$$\Leftrightarrow x^2(t) + \left(y(t) - \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda})\right)^2 = -1 + \frac{1}{4}(\lambda + \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{\lambda})^2$$
On en déduit que la trajectoire est incluse dans le cercle :
$$\text{coordonnées du centre : } \left(0, \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda})\right) \qquad \text{rayon : } \frac{1}{2}\left|\lambda - \frac{1}{\lambda}\right|$$
La figure 4 présente le tracé de quelques trajectoires pour des valeurs de λ. Les points d'intersection avec l'axe (Oy) ont pour ordonnées :
$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \pm \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda \text{ ou } \frac{1}{\lambda}$$

Partie 2. Expressions des solutions.

1. a. Les solutions sont de la forme $t \to \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et A une primitive de $t \to 2\tan t$.
Dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le cos est strictement positif. On peut choisir $A(t) = \ln(\cos(t))$. Les solutions sont donc les fonctions
$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: t \to \lambda \cos^2 t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

b. On utilise la méthode de variation des constantes. On cherche une solution particulière sous la forme $t \to \lambda(t)\cos^2 t$. La fonction λ doit vérifier
$$\lambda'(t)\cos^2 t = -1$$
On peut donc choisir $\lambda(t) = -\tan t$ ce qui conduit à la solution particulière
$$t \to -\tan t \cos^2 t = -\sin t \cos t$$
Les solutions sont donc les fonctions
$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: t \to -\sin t \cos t + \lambda \cos^2 t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

2. a. Ici z est une solution telle que $z(0) = i\lambda$ avec λ réel non nul. D'après la question 4. de la première partie, on a (pour *tous* les t de I) :
$$\frac{\operatorname{Im}(z(t))}{1+|z(t)|^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq 0$$
On en déduit que, pour tous les t dans I, $z(t) \notin \mathbb{R}$. En particulier, il ne peut pas être égal à $\tan t$.
On aurait pu aussi raisonner en terme de problème de Cauchy.

b. Notons $u(t) = \frac{1}{z(t)-\tan t}$. On a alors $z(t) - \tan t = \frac{1}{u(t)}$ et on peut déduire :
$$\left.\begin{aligned} z'(t) &= 1 + z^2(t) \\ \tan' t &= 1 + \tan^2 t \\ (\frac{1}{u})' &= -\frac{u'(t)}{u^2(t)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow z^2(t) - \tan^2 t = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$$
$$\Rightarrow \frac{z(t)+\tan t}{u(t)} = -\frac{u'(t)}{u^2(t)} \Rightarrow \frac{2\tan t}{u(t)} + \frac{1}{u(t)^2} = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$$
$$\Rightarrow u'(t) + 2\tan(t)\, u(t) = -1$$
La fonction u vérifie donc l'équation différentielle de la question 1.b.

c. D'après la question précédente et le résultat de la question 1.b, il existe un nombre complexe μ tel que :
$$\forall t \in I : \frac{1}{z(t) - \tan t} = \mu \cos^2 t - \sin t \cos t$$
En prenant la valeur en 0, on obtient $\mu = -\frac{i}{\lambda}$. On en déduit :
$$z(t) - \tan t = \frac{1}{-\frac{i}{\lambda}\cos^2 t - \sin t \cos t}$$
$$\Rightarrow z(t) = \tan t - \frac{1+\tan^2 t}{\tan t + \frac{i}{\lambda}} = \frac{\frac{i}{\lambda}\tan t - 1}{\tan t + \frac{i}{\lambda}} = \frac{\tan t + \lambda i}{1 - i\lambda \tan t}$$

3. Dans cette question z est une solution définie dans un intervalle I contenant 0 et telle que $z(0) = \lambda \neq 0$.

a. La fonction $t \to z(t) - \tan t$ est continue en 0 et elle prend en 0 une valeur non nulle. Par continuité, il existe donc un intervalle J dans lequel elle ne s'annule pas. Ici encore, on aurait pu raisonner en terme de problème de Cauchy. S'il existe un t_0 tel que $z(t_0) = \tan(t_0)$ alors les deux fonctions sont solutions d'une même problème de Cauchy en t_0 elles doivent donc coïncider dans leur domaine ; en particulier en 0 ce qui est contraire à l'hypothèse.
On peut considérer l'inverse dans J de $z - \tan$.

b. Les calculs sont les mêmes qu'en 2.. La fonction indiquée vérifie l'équation différentielle de la question 1.b. Il existe un nombre complexe μ tel que
$$\forall t \in J : \frac{1}{z(t) - \tan t} = \mu \cos^2 t - \sin t \cos t$$
En prenant $t = 0$, on obtient que $\mu = \frac{1}{\lambda}$ est réel et
$$z(t) - \tan t = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}\cos^2 t - \sin t \cos t}$$
$$\Rightarrow z(t) = \tan t + \frac{1+\tan^2 t}{\frac{1}{\lambda} - \tan t} = \frac{\frac{1}{\lambda}\tan t + 1}{\frac{1}{\lambda} - \tan t} = \frac{\tan t + \lambda}{1 - \lambda \tan t}$$
$$= \tan(t + t_0) \text{ si } t_0 = \arctan \lambda$$
On aurait aussi pu raisonner en *séparant les variables*, lorsque z est à valeurs réelles
$$\forall t \in J : \frac{z'(t)}{1+z^2(t)} = 1 \Rightarrow t \to \arctan(z(t)) - t \text{ est constante.}$$

Partie 3. Projection stéréographique.

1. a. Le seul point de la sphère pour lequel $\gamma = 1$ est le pôle nord N qui est exclu. En revanche $\alpha = \beta = 0$ est aussi possible pour le pôle sud de coordonnées $(0, 0, -1)$. Lorsque $M \neq N$, on peut former une représentation paramétrique de la droite (NM). Les coordonnées d'un point de cette droite sont de la forme $(\lambda\alpha, \lambda\beta, 1 + \lambda(\gamma - 1))$ avec λ réel. Un tel point est sur le plan si et seulement si

$$1 + \lambda(\gamma - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-\gamma}$$

On en déduit que l'affixe du projeté stéréographique est

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1-\gamma}$$

De plus, lorsque $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$,

$$w = w\frac{\alpha - i\beta}{\alpha - i\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1-\gamma)(\alpha - i\beta)} = \frac{1+\gamma}{\alpha - i\beta}$$

car $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ donc $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$.

b. D'après la question précédente :

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{\alpha + i\beta}{1-\gamma} \\ \overline{w} &= \frac{\alpha + i\beta}{1-\gamma} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} w + \overline{w} &= \frac{2\alpha}{1-\gamma} \\ w - \overline{w} &= \frac{2i\beta}{1-\gamma} \end{aligned}\right.$$

$$|w|^2 + 1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1-\gamma)^2} + 1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2\gamma + \gamma^2}{(1-\gamma)^2} = \frac{2(1-\gamma)}{(1-\gamma)^2} = \frac{2}{1-\gamma}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{w + \overline{w}}{1 + |w|^2} \qquad i\beta = \frac{w - \overline{w}}{1 + |w|^2}$$

On a aussi

$$1 - \gamma = \frac{2}{|w|^2 + 1} \Rightarrow \gamma = 1 - \frac{2}{|w|^2 + 1} = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}$$

c. Il s'agit d'une petite question technique qui servira dans le calcul de la question 4.c. Avec les formules précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{1-\gamma} &= \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}\,\frac{|w|^2 + 1}{2} = \frac{|w|^2 - 1}{2} \\ \frac{\beta}{1-\gamma} &= \frac{i(\overline{w} - w)}{|w|^2 + 1}\,\frac{|w|^2 + 1}{2} = i\frac{\overline{w} - w}{2} \end{aligned}$$

2. Il s'agit ici d'utiliser les formules du cours permettant de dériver des fonctions formées à partir de produits scalaires. Les deux dérivées sont nulles car $\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM(t)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega}$ et à $\overrightarrow{OM(t)}$.

$$\frac{d}{dt}\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\| = \frac{(\overrightarrow{OM(t)}/\overrightarrow{M'}(t))}{\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{OM(t)}) = (\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{M'}(t))) = 0$$

Le caractère constant de $t \to \left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|$ montre que $M(t)$ reste sur une sphère centrée en O.
Le caractère constant de $t \to (\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{OM(t)})$ montre que $M(t)$ reste sur un plan orthogonal à $\overrightarrow{\Omega}$.
Le point $M(t)$ reste donc sur un cercle intersection d'une sphère et d'un plan.

3. Dans le repère choisi, seule la dernière coordonnée de $\overrightarrow{\Omega}$ est non nulle. On en déduit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\overrightarrow{\Omega}\| \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\|\overrightarrow{\Omega}\|Y \\ \|\overrightarrow{\Omega}\|X \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X'(t) = -\|\overrightarrow{\Omega}\|Y(t) \\ Y'(t) = \|\overrightarrow{\Omega}\|X(t) \\ Z'(t) = 0 \end{cases}$$

4. a. On dérive simplement l'expression de $w(t)$ obtenue en 1.a. en se dispensant d'écrire les (t)

$$w' = \frac{\alpha' + i\beta'}{1-\gamma} + \underbrace{\frac{\alpha + i\beta}{1-\gamma}}_{=w}\frac{\gamma'}{1-\gamma} = \frac{\alpha' + i\beta' + w\gamma'}{1-\gamma}$$

b. On obtient la formule annoncée en injectant les expressions des dérivées

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

dans la formule de la question précédente.

c. Divisons par $1-\gamma$ l'expression du 1.b. On obtient une expression de w'.

$$w'(t) = irw(t) + (q-ip)\frac{\gamma(t)}{1-\gamma(t)} - qw^2(t) + w(t)(p+iq)\frac{\beta(t)}{1-\gamma(t)}$$

dans laquelle figurent les quantités calculées en 1.c. En développant, les $|w^2|$ disparaissent et on obtient

$$w'(t) = irw(t) - \frac{1}{2}(q-ip) - qw^2(t) + \frac{1}{2}(q-ip)w^2 = a + bw(t) + cw^2(t)$$

avec

$$a = \frac{1}{2}(-q+ip) \qquad b = ir \qquad c = -\frac{1}{2}(q+ip) = \overline{a}$$

On retrouve l'équation (1) de la tangente pour $a=1$ et $b=0$ soit $p=0$, $q=-2$, $r=0$.