Exercice 1.

On se place[1] dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un produit scalaire noté $(\ /\ )$ et d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit Ω un point du plan et R un réel strictement positif.

PARTIE I

1. Étant donné un point M du plan, combien existe-t-il de points M' vérifiant les deux conditions :
$$\begin{cases} \text{Les points } M, M' \text{ et } \Omega \text{ sont alignés.} \\ (\overrightarrow{\Omega M}/\overrightarrow{\Omega M'}) = R^2 \end{cases}$$
2. On considère l'application ϕ, de $\mathcal{P}\setminus\{\Omega\}$ dans lui-même, qui, à tout point M distinct de Ω associe le point M' tel que :
$$\begin{cases} \text{Les points } M, M' \text{ et } \Omega \text{ sont alignés.} \\ (\overrightarrow{\Omega M}/\overrightarrow{\Omega M'}) = R^2 \end{cases}$$
Montrer que l'application ϕ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
3. Quelle est l'image par ϕ d'un cercle de centre Ω ?
4. Quelle est l'image par ϕ d'une droite passant par Ω privée de Ω ?
5. Soit M un point du plan d'affixe z. On note z_Ω l'affixe de Ω et z' l'affixe de $\phi(M)$. Exprimer z' en fonction de z, z_Ω et R.

PARTIE II

1. On suppose dans cette question que Ω est le point d'affixe 1 et que $R = 1$.
   a. Déterminer l'ensemble A des réels θ pour lesquels le point $M(\theta)$ d'affixe
   $$z = \frac{1}{2}(1+e^{i\theta})$$
   n'est pas le point Ω.
   b. Pour $\theta \in A$ déterminer l'image par ϕ du point $M(\theta)$.
   c. Déterminer l'image par ϕ du cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω.
   d. Déterminer l'image par ϕ de l'axe des ordonnées.
2. Soit (E) l'ellipse d'équation
$$3x^2 + 4y^2 = 12$$
   a. Déterminer l'excentricité et les foyers de cette ellipse.
   b. On note F le foyer d'abscisse positive. Donner une équation polaire de (E) dans le repère $(F,\vec{i},\vec{j})$.
   c. On suppose dans cette question que Ω est le point F et que $R = 1$.
   Déterminer une équation polaire dans le repère $(F,\vec{i},\vec{j})$ de l'image de (E) par ϕ.
3. On suppose dans cette question que Ω est le point O et que $R = \sqrt{2}$. Soit (H) l'hyperbole d'équation $xy = 1$.
Déterminer l'image de (H) par ϕ (on pourra commencer par déterminer une équation polaire de (H)).

Exercice 2.

On se place[2] dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Si M et N sont deux points du plan, on note $d(M,N)$ la distance de M à N.
Soit a un nombre réel strictement positif. Notons A et B les points de coordonnées respectives $(-a,0)$ et $(a,0)$.
Soit k un nombre réel strictement positif.

1. Soit $M \neq O$ un point de coordonnées cartésiennes (x,y) et de coordonnées polaires (r,θ) (avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$). On considère la courbe (C) formée par l'ensemble des points M tels que
$$d(A,M)d(B,M) = k^2$$
   a. Montrer que la courbe (C) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées.
   b. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (C).
   c. Déterminer une équation polaire (E) de la courbe (C).
2. Dans cette question on se limite à $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ce qui revient à considérer $(\tilde{C})$ la partie de la courbe comprise dans le quart de plan correspondant à $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
   a. Pour θ fixé, montrer que (E) est un trinôme en $R = r^2$ (de paramètres a, k et θ).

[1] d'après Banque PT épreuve B 2009

[2] d'après CCP TSI maths 1 2009

b. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par a, k et θ pour que le trinôme en R admette deux solutions strictement positives, éventuellement confondues (on ne demande pas de calculer les racines).
Montrer que ces conditions sont équivalentes à :

$$\begin{cases} k \leq a \\ \theta \in I_k \end{cases}$$

où I_k est un intervalle à préciser.

c. Si $k < a$, montrer que la courbe $(\tilde{C})$ est la réunion de deux courbes (C_i) (pour $i \in \{1, 2\}$) admettant respectivement une équation polaire de la forme $r = r_i(\theta)$ avec r_i une fonction définie sur I_k. Déterminer les fonctions r_1 et r_2.

d. Si $k > a$, déterminer le nombre de points d'intersections d'une droite passant par l'origine avec la courbe $(\tilde{C})$.

3. a. Vérifier que dans le cas particulier où $k = a$, une équation polaire de la courbe (C) est $r = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$.

b. Dans le cas où $k = a$ et $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Montrer que la vitesse au point de paramètre θ est

$$\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\overrightarrow{e_\alpha} \text{ où } \overrightarrow{e_\alpha} = \cos(\alpha)\overrightarrow{i} + \sin(\alpha)\overrightarrow{j}$$

et α est à déterminer.
Étudier et tracer la courbe (C)

Problème.

On considère une équation différentielle

$$z' = 1 + z^2 \qquad (1)$$

Une solution est une fonction définie et dérivable dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs *complexes*.

Partie 1. Nature des trajectoires

1. Déterminer les solutions qui sont des fonctions constantes définies dans $\mathbb{R}$.
2. Donner une solution à valeurs réelles en précisant soigneusement son intervalle de définition.
3. Soit z une fonction à valeurs complexes définie et dérivable dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. Former un système $(\mathcal{S})$ de relations entre x, y et leurs dérivées tel que z soit solution de (1) si et seulement si x et y vérifient $(\mathcal{S})$.
4. Soit z une solution de (1). Calculer la dérivée de

$$\frac{\mathrm{Im}\, z}{1 + |z|^2}$$

5. À toute solution non constante z de (1) définie dans un intervalle I, on associe la courbe paramétrée Z telle que, pour tout $t \in I$, $Z(t)$ est le point d'affixe $z(t)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On suppose que $0 \in I$ avec $z(0) = i\lambda$ pour λ réel non nul. Montrer que le support (trajectoire) c'est à dire l'ensemble de points

$$\{Z(t), t \in I\}$$

est inclus dans une courbe géométrique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques en fonction de λ. Quels sont les points d'intersection de cette courbe avec l'axe (Oy) ?

Partie 2. Expressions des solutions

On cherche ici à exprimer les solutions de (1) à l'aide de fonctions usuelles.

1. a. Déterminer l'ensemble des fonctions à valeurs complexes vérifiant

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: z'(t) + 2\tan(t)\, z(t) = 0$$

b. Déterminer l'ensemble des fonctions à valeurs complexes vérifiant

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: z'(t) + 2\tan(t)\, z(t) = -1$$

2. Soit I un intervalle inclus dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et contenant 0.
Soit z une solution de (1) définie et dérivable dans I telle que $z(0) = i\lambda$ avec λ réel non nul.

a. Montrer que $z(t) \neq \tan t$ pour tout $t \in I$.

b. Former une équation différentielle dont la fonction définie dans I par

$$t \rightarrow \frac{1}{z(t) - \tan(t)}$$

est solution.

c. Pour tout t de I, exprimer $z(t)$ comme un quotient ne contenant que λ, i et $\tan(t)$.

3. Soit I un intervalle inclus dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et contenant 0. Soit z une solution de (1) définie et dérivable dans I telle que $z(0)=\lambda$ avec λ un nombre réel non nul.

   a. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant 0 et inclus dans I tel que

$$\forall t \in J : z(t) \neq \tan(t)$$

   b. Pour tout t de I, exprimer $z(t)$ comme un quotient ne contenant que λ et $\tan(t)$. En déduire que

$$\forall t \in J : z(t) = \tan(t+t_0) \text{ avec } t_0 = \arctan(\lambda)$$

Partie 3. Projection stéréographique

Dans un espace orienté $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on note N le point de coordonnées $(0,0,1)$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon 1.
Les fonctions coordonnées relatives à ce repère sont désignées par x, y, z. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sera noté $(\overrightarrow{u}/\overrightarrow{v})$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z=0$. Il est muni du repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ ce qui permet de définir l'affixe complexe $w=x(W)+iy(W)$ d'un point W de ce plan.

1. Pour chaque point $M\in\mathcal{S}-\{N\}$ de coordonnées (α,β,γ), on considère la droite (NM) (voir figure 1). Son intersection avec le plan $\mathcal{P}$ est formée d'un seul point noté W d'affixe w appelé le projeté stéréographique de M.

   a. Montrer que $\gamma\neq 1$ et que $w=\dfrac{\alpha+i\beta}{1-\gamma}$. Montrer que $w=\dfrac{1+\gamma}{\alpha-i\beta}$ si $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Dans quel cas peut-on avoir $(\alpha,\beta)=(0,0)$?

   b. Montrer que

$$\alpha=\frac{\overline{w}+w}{|w|^2+1} \qquad \beta=i\frac{\overline{w}-w}{|w|^2+1} \qquad \gamma=\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}$$

   c. Préciser $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ et $\frac{\beta}{1-\gamma}$ en fonction de w, $\overline{w}$ et i.

Dans la suite de cette partie, $\overrightarrow{\Omega}$ est un vecteur fixé de coordonnées (p,q,r). On considère une courbe paramétrée définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} I &\to \mathcal{E}\\ t &\to M(t)\end{aligned}$$

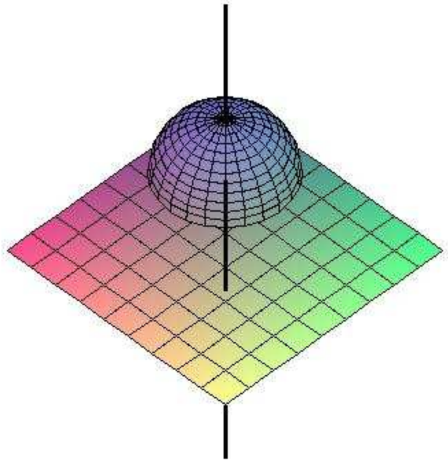

FIG. 1: Projection stéréographique

et à valeurs *dans l'espace* $\mathcal{E}$. Pour chaque $t\in I$, les coordonnées de $M(t)$ sont $(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))$. Ainsi α, β, γ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que cette courbe paramétrée est dérivable et vérifie

$$\forall t\in I : \overrightarrow{M'}(t)=\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM(t)}$$

2. Montrer que $\|\overrightarrow{OM(t)}\|$ et $(\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{OM(t)})$ sont indépendantes de t. Que peut-on en déduire pour l'ensemble des points $M(t)$?

3. On considère un repère orthonormé direct
$$(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}) \text{ avec } \overrightarrow{K} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\Omega}\|}\overrightarrow{\Omega}$$
Les coordonnées de $M(t)$ dans ce repère sont notées $(X(t), Y(t), Z(t))$. Former le système d'équations différentielles vérifiées par X, Y, Z.
4. On suppose que pour tous les t de I, $M(t) \in \mathcal{S} - \{N\}$. On note $w(t)$ l'affixe complexe du projeté stéréographique de $M(t)$.
   a. Vérifier que
   $$w'(t) = \frac{\alpha'(t) + i\beta'(t) + w(t)\gamma'(t)}{1 - \gamma(t)}$$
   b. Vérifier que
   $$\begin{aligned}&\alpha'(t) + i\beta'(t) + w(t)\gamma'(t)\\ &\qquad = ir(\alpha(t) + i\beta(t)) + (q - ip)\gamma(t) - w(t)q(\alpha + i\beta) + w(t)(p + iq)\beta(t)\end{aligned}$$
   c. En déduire les nombres complexes a, b, c tels que
   $$w'(t) = a + bw(t) + cw^2(t)$$
   Cette relation est une forme particulière de l'équation différentielle dite *de Ricatti*. Pour quelles valeurs de p, q, r retrouve-t-on l'équation (1) ?