Exercice I

1. L'ensemble E contient 1, il est clairement stable pour l'addition et la symétrisation. Comme
$$(a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) = aa'+2bb'+(ab'+ba')\sqrt{2}$$
l'ensemble E est aussi stable pour la multiplication. Le seul point qui mérite d'être détaillé est la stabilité pour l'inversion.
Lorsque $x = a+b\sqrt{2}$ n'est pas nul, a^2-2b^2 est un rationnel. Ce rationnel est non nul car $\sqrt{2}$ est irrationnel. L'inverse de x est bien dans F car il s'obtient à l'aide de la quantité conjuguée soit
$$x^{-1} = \underbrace{\frac{a}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{(-b)}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}.$$

2. a. Si un même $z\in F$ admet deux écritures distinctes, il existe des nombres rationnels a, b, c, d tels que
$$a+b\sqrt{2}+cj+dj\sqrt{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b\sqrt{2}=0 \\ c+d\sqrt{2}=0\end{cases} \text{car } j \text{ n'est pas réel}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ c=d=0\end{cases} \text{car } \sqrt{2} \text{ est irrationnel}$$

b. Les stabilités pour l'addition et la symétrisation sont évidentes. Pour la multiplication, la stabilité résulte du calcul explicite du produit.
$$z = a+b\sqrt{2}+cj+dj\sqrt{2},\qquad z' = a'+b'\sqrt{2}+c'j+d'j\sqrt{2}$$
$$zz' = (\underbrace{aa'+2bb'-cc'-2dd'}_{A(z,z')\in\mathbb{Q}}) + (\underbrace{ab'+ba'-cd'-dc'}_{B(z,z')\in\mathbb{Q}})\sqrt{2}$$
$$+(\underbrace{ac'+2bd'+ca'-cc'+2db'-2dd'}_{C(z,z')\in\mathbb{Q}})j + (\underbrace{ad'+bc'-cd'+cb'+da'-dc'}_{D(z,z')\in\mathbb{Q}})j\sqrt{2}$$
Le seul point délicat est encore la stabilité pour l'inversion. Il ne faut surtout pas chercher à expliciter l'inverse d'un élément non nul quelconque
$$z = a+b\sqrt{2}+cj+cj\sqrt{2}\in F.$$
On va seulement montrer qu'il est dans F en utilisant les stabilités déjà à notre disposition. Remarquons d'abord que F contient E et $\overline{z}$ car $\overline{j}=-1-j$. Ensuite
$$|z|^2 = (\underbrace{a+b\sqrt{2}-\frac{c}{2}-\frac{d}{2}\sqrt{2}}_{\in E})^2 + \frac{3}{4}(\underbrace{c+d\sqrt{2}}_{\in E})^2$$
ceci montre que $|z|^2\in E\subset F$ donc son inverse aussi. On conclut en écrivant
$$z^{-1} = \left(|z|^2\right)^{-1}\overline{z}.$$

c. Le nombre à inverser se factorise ce qui facilite le calcul :
$$z = 1+\sqrt{2}+j+j\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})(1+j) = -(1+\sqrt{2})\overline{j}$$
$$\Rightarrow z^{-1} = -(-1+\sqrt{2})j = j-j\sqrt{2}$$

3. On doit vérifier :
   - Pour tout f et g dans $G_A(B)$, $f\circ g\in G_A(B)$ c'est à dire :
     - $\forall a\in A : f\circ g(a)=a$.
     - $\forall (b,b')\in B^2 : f\circ g(b+b') = f\circ g(b)+f\circ g(b'), f\circ g(bb') = f\circ g(b)\, f\circ g(b')$
   - Pour tout f dans $G_A(B)$, la bijection réciproque $f^{-1}\in G_A(B)$ c'est à dire :
     - $\forall a\in A : f^{-1}\circ g(a)=a$.
     - $\forall (b,b')\in B^2 : f^{-1}(b+b') = f^{-1}(b)+f^{-1}(b'), f^{-1}(bb') = f^{-1}(b)\, f^{-1}(b')$

   Toutes ces relations sont immédiates à partir des définitions sauf les dernières pour lesquelles la bijectivité est capitale
$$\begin{aligned} f(f^{-1}(b)+f^{-1}(b')) &= f(f^{-1}(b))+f(f^{-1}(b)) \text{ car } f \text{ est un morphisme}\\ &= b+b' = f(f^{-1}(b+b')) \text{ par définition de la bijection réciproque}\\ &\Rightarrow f^{-1}(b)+f^{-1}(b') = f^{-1}(b+b') \text{ par définition de la bijection réciproque}\end{aligned}$$
   Le raisonnement est le même pour le produit.

4. Comme f est un automorphisme qui laisse les rationnels invariants,
$$0 = f(0) = f((\sqrt{2})^2-2) = \left(f(\sqrt{2})\right)^2 - 2$$
donc $f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. De même $1+f(j)+f(j)^2=0$ donc $f(j)\in\{j,j^2\}=\{j,-1-j\}$.
Lorsque $f(\sqrt{2})$ et $f(j)$ sont fixés, l'image d'un autre $z=a+b\sqrt{2}+cj+cj\sqrt{2}\in F$ est fixée avec
$$f(z) = a+bf(\sqrt{2})+cf(j)+cf(j)f(\sqrt{2})$$

Rémy Nicolai S0905C

à cause des propriétés d'automorphisme de f. On en déduit que $G_{\mathbb{Q}}(F)$ contient au plus 4 éléments.
Vérifions que les quatre couples d'images possibles correspondent effectivement à des automorphismes.

- Cas $\sqrt{2} \to \sqrt{2}$, $j \to j$. Cela correspond évidemment à un automorphisme : l'identité de F. On le note id.
- Cas $\sqrt{2} \to \sqrt{2}$, $j \to -1-j$. Cela correspond à un automorphisme : la restriction à F de la conjugaison complexe. On le note c.
- Cas $\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, $j \to j$. Définissons l'application c' par
$$z = a + b\sqrt{2} + cj + cj\sqrt{2} \to c'(z) = z = a - b\sqrt{2} + cj + cj\sqrt{2}$$
Cette fonction conserve clairement l'addition mais ce n'est pas évident pour la multiplication. Cela résulte des formules de la question 1. Prendre l'image par c', c'est remplacer b par $-b$ et d par $-d$, on en déduit :
$$\begin{cases} A(c'(z), c'(z')) = A(z,z') \\ B(c'(z), c'(z')) = -B(z,z') \\ C(c'(z), c'(z')) = C(z,z') \\ D(c'(z), c'(z')) = -D(z,z') \end{cases} \Rightarrow c'(zz') = c'(z)c'(z')$$
- Cas $\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, $j \to -1-j$. Il est réalisé par $c \circ c'$.

On en déduit donc finalement :
$$G_{\mathbb{Q}}(F) = \{id, c, c', c\circ c'\}$$
Tout f de $G_E(F)$ est un morphisme de F qui laisse E invariant, il laisse donc $\mathbb{Q}$ invariant donc $G_E(F) \subset G_{\mathbb{Q}}(F)$. Parmi les quatre éléments de $G_{\mathbb{Q}}(F)$, seuls id et c laissent E invariant. On a donc :
$$G_E(F) = \{id, c\}.$$

Exercice II

1. Entre deux zéros consécutifs de f, on peut appliquer le théorème de Rolle. On obtient ainsi $n-1$ zéros pour f'. Ils sont distincts car ils appartiennent à des intervalles ouverts disjoints. On applique encore $n-1$ fois le théorème de Rolle entre les zéros consécutifs de f' et on obtient $n-2$ zéros distincts. On continue de même, le nombre de zéros diminuant de 1 à chaque dérivation.
Pour $f^{(n-1)}$ il ne reste plus que deux zéros et on applique une dernière fois le théorème de Rolle entre eux ce qui prouve l'existence d'un zéro pour $f^{(n)}$.
2. Pour chaque $x \in I \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$, considérons la fonction
$$\varphi_x : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \to (t-a_1)\cdots(t-a_n)K_x - f(t) \end{cases}$$
où K_x est un réel choisi pour que $\varphi_x(x) = 0$. On a donc :
$$f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)K_x$$
La fonction φ_x est $\mathcal{C}^\infty$ comme f et s'annule $n+1$ fois : en chacun des a_i et en x. On peut donc lui appliquer le résultat de la question 1.
Il existe $c_x \in I$ tel que $\varphi^{(n)}(c_x) = 0$. Or dans la dérivée d'ordre n de la partie polynomiale (de degré n) ne subsiste que le terme constant. On en tire
$$\varphi_x^{(n)}(t) = n!K_x - f^{(n)}(t)$$
On déduit alors :
$$\varphi^{(n)}(c_x) = 0 \Rightarrow K_x = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \Rightarrow f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$
$$\Rightarrow |f(x)| \leq (x-a_1)\cdots(x-a_n)\frac{|M_n|}{n!}$$
Cette inégalité est vraie pour tous les x autres que les a_i, elle est aussi valable aux a_i puisque ce sont des zéros de f.
3. On reconnait dans les L_i de l'énoncé les *polynômes d'interpolation de Lagrange*. On vérifie immédiatement qu'ils sont tous de degré $n-1$ avec
$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\},\ \widetilde{L_i}(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$
Définissons un polynôme P par : $P = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)L_i$.
D'après les propriétés des polynômes d'interpolation signalées au début, ce polynôme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $\widetilde{P}(a_j) = f(a_j)$ pour tout j. En effet, le seul i de la somme qui contribue réellement est $i = j$ car $\widetilde{L_i}(a_j)$ est nul pour les autres j.
D'autre part, sa contribution est exactement $f(a_j)$ car $\widetilde{L_j}(a_j) = 1$.
Supposons qu'il existe un autre polynôme Q vérifiant les mêmes propriétés.
Les polynômes P et Q prennent les mêmes valeurs aux a_i. Le polynôme $P - Q$ admet donc au moins n racines à savoir tous les a_i. Or ce polynôme est, par hypothèse, de

degré inférieur ou égal à $n-1$, il doit donc être nul ce qui assure l'unicité.
L'application $\varphi = f - P$ vérifie les hypothèses de la fonction f de la question 2 avec le même majorant M_n car la dérivée n-ième de P est nulle. On obtient donc l'inégalité demandée.

Exercice III

1. Vérifions les propriétés requises pour que $\mathcal{C}(A)$ soit un sous groupe.
   Non vide : Il contient le neutre qui commute avec tout le monde
   Stable pour l'opération : Soit x et y deux éléments de $\mathcal{C}(A)$ alors :
   $$\forall a \in A : (xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = a(xy)$$
   donc $xy \in \mathcal{C}(A)$.
   Stable pour l'inversion : Soit $x \in \mathcal{C}(A)$ alors :
   $$\forall a \in A : x^{-1}a = x^{-1}a(xx^{-1}) = (x^{-1}x)ax^{-1} = ax^{-1}$$
   donc $x^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.
2. Montrons que $X \subset Y$ entraîne $\mathcal{C}(Y) \subset \mathcal{C}(X)$. En effet tout élément u de $\mathcal{C}(Y)$ commute avec tout élément de Y. Il commute donc avec tous les éléments de X (qui sont des éléments particuliers de Y). Un tel u est donc dans $\mathcal{C}(X)$.
3. Montrons que $X \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$. En effet tout x de X commute par définition de $\mathcal{C}(X)$ avec un élément quelconque de $\mathcal{C}(X)$.
4. Utilisons d'abord les questions 3. appliquée à A puis la question 2.
   $$A \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))) \subset \mathcal{C}(A)$$
   Utilisons ensuite à nouveau la question 3. mais *appliquée à* $\mathcal{C}(A)$ au lieu de X. On obtient l'autre inclusion :
   $$\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)))$$

Problème

I. Exemples

1. Comme
   $$p_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1$$
   le produit infini diverge vers $+\infty$.
2. La clé est la relation $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
   $$\cos\frac{a}{2^p}\sin\frac{a}{2^p} = \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^{p-1}} \Rightarrow p_n = \prod_{p=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{a}{2^{p-1}}}{\sin\frac{a}{2^p}} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$$
   De plus, $2^n\sin\frac{a}{2^n} \to a$ quand $n \to +\infty$. Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{\sin a}{a}$.
3. Ici encore une simplification télescopique multiplicative se produit.
   $$\begin{aligned} u_k &= \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &\Rightarrow p_n = \frac{(1)(3)}{2^2}\frac{(2)(4)}{3^2}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
4. Calculons $(1-a^2)p_n$.
   $$\begin{aligned} (1-a^2)p_n &= (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\cdots(1+a^{2^n}) \\ &= (1-a^4)(1+a^4)(1+a^8)\cdots(1+a^{2^n}) \\ &= (1-a^8)(1+a^8)\cdots(1+a^{2^n}) = \cdots \\ &= (1-a^{2^n})(1+a^{2^n}) = (1-a^{2^{n+1}}) \end{aligned}$$
   On en déduit que le produit infini converge vers $\frac{1}{1-a^2}$.

II. Conditions.

1. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \neq 0$, $(p_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l et
   $$(\frac{p_{n+1}}{p_n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$
   converge vers 1.
2. Comme tous les u_k sont strictement positifs à partir de n_0, on peut utiliser librement le logarithme et la fonction exponentielle qui sont toutes les deux continues.
   $$(p_n)_{n\geq n_0} \text{ converge } \Leftrightarrow (\frac{p_n}{p_{n_0-1}})_{n\geq n_0} \text{ converge } \Leftrightarrow (\ln(\frac{p_n}{p_{n_0-1}}))_{n\geq n_0} \text{ converge.}$$

Or $\ln(\frac{p_n}{p_{n_0-1}} = \sum_{k=n_0}^{n} \ln(u_k)$. On en déduit

$$(p_n)_{n\geq n_0} \text{ converge } \Leftrightarrow \left(\sum \ln(u_k)\right)_{k\geq n_0} \text{ converge.}$$

Dans le cas de convergence, on a

$$\prod_{n\geq 1} u_n = \left(\prod_{n\geq 1}^{n_0-1} u_n\right) e^{\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)}$$

3. Les hypothèses traduisent le fait que la série des $\ln u_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang. On peut donc appliquer les critères des séries à termes positifs. Si u_n ne tend pas vers 1, la série et le produit divergent grossièrement. Si la suite tend vers 1 alors v_n tend vers 0 et $\ln(1\pm v_n) \sim \pm v_m$. La série des $\ln(u_n)$ converge si et seulement si la série des v_n converge.
On peut remarquer que dans le cas où les u_k sont plus petits que 1 à partir d'un certain rang, la suite des produits est décroissante et positive donc elle converge. Mais par définition, la convergence d'un produit infini exige une limite non nulle. En fait la série des v_k diverge vers l'infini si et seulement si le produit des u_k tend vers 0.
4. a. On veut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$f \;:\; x \to (\ln x)^2$$

entre p et $p+1$. Étudions les variations de la dérivée

$$x \to 2\frac{\ln x}{x}$$

Comme

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \text{ pour } x > e,$$

cette dérivée est décroissante dans $]3,+\infty[$. On en déduit

$$\forall x \in [p,p+1]\,,\ \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln p}{p}$$

La formule demandée traduit alors

$$0 \leq f(p+1) - f(p) \leq (p+1-p)f'(p)$$

b. En sommant les inégalités du a., pour tout p entre 3 et $n \geq 3$, on obtient

$$(\ln(n+1))^2 - (\ln(3))^2 \leq 2\left(S_n - \frac{\ln 2}{2}\right)$$
$$\Rightarrow S_n \geq \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{\ln 2 - (\ln(3))^2}{2}$$

Ce qui entraîne que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

III. Une expression de sin comme produit infini.

1. a. Pour x fixé dans $]-1,+1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les $\frac{2x}{x^2-n^2}$ sont strictement négatifs. L'opposé du terme général est équivalent à $\frac{x^2}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. On pouvait aussi dire que la série est absolument convergente.
b. On se trouve dans le premier cas de la question II.3. Le produit infini est convergent car la série de terme général $\frac{x^2}{n^2}$ est convergente.
2. a. Après calculs, on trouve

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi t) = \frac{1}{t} - \frac{\pi^2}{3}t + o(t).$$

b. En 0, comme $\sin x \sim x$, $\ln(\frac{sin\pi t}{\pi t})$ converge vers 0. En revanche la fonction diverge vers $-\infty$ en 1 et -1. On prolonge donc par continuité en une fonction f continue

$$\forall t \in]-1,+1[,\ f(t) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}.$$

c. Comme elle est composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, la fonction est clairement $\mathcal{C}^1$ dans l'intervalle privé de 0 et continue dans $]-1,1[$. Pour montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$ dans $]-1,1[$, d'après le théorème de la limite de la dérivée, il suffit de prouver que la dérivée dans l'ouvert privé de 0 admet une limite fini en 0. Or

$$\forall t \neq 0,\ f'(t) = \left(\frac{\cos(\pi t)}{t} - \frac{\sin(\pi t)}{\pi t^2}\right)\frac{\pi t}{\sin(\pi t)} = \pi \operatorname{cotan}(\pi t) - \frac{1}{t} \sim -\frac{\pi^2}{3}t \to 0.$$

La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \pi \operatorname{cotan}(\pi t) - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

3. a. On calcule la différence
$$\frac{1}{n^2-1}-\frac{t}{n^2-t^2}=\frac{(n^2+t)(1-t)}{(n^2-1)(n^2-t^2)}>0.$$

b. Fixons un entier N et notons r_N le reste :
$$f'(x)=\sum_{k=1}^{N}\frac{2x}{x^2-k^2}+r_N(x).$$
La fonction r_N qui s'exprime comme une différence est continue. On intégre entre 0 et x (pour $|x|<1$) en utilisant la linéarité de l'intégrale
$$\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)=f(x)=\sum_{k=1}^{N}\int_0^x\frac{2t}{t^2-k^2}\,dt+\underbrace{\int_0^x r_N(t)\,dt}_{=R_N(x)}$$
Majorons $|R_N(x)|$. Commençons par
$$|R_N(x)|\leq\int_0^{|x|}|r_N(t)|\,dt.$$
$r_N(t)$ est le reste d'une série. On le majore (pour tous les t) avec l'inégalité de la question a. par un nombre *indépendant* de t
$$\begin{aligned}|r_N(t)|=\lim_{p\to+\infty}\left|\sum_{k=N+1}^{p}\frac{2t}{t^2-k^2}\right|&\leq\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{p}\left|\frac{2t}{t^2-k^2}\right|\\&\leq\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{p}\frac{2}{k^2-1}\leq\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{2}{k^2-1}\end{aligned}$$
Il reste à integrer cette fonction constante sur un intervalle de longueur $|x|$ pour obtenir l'inégalité demandée.

c. Calculons les intégrales dans la somme
$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^x\frac{2t}{t^2-k^2}\,dt=\sum_{k=1}^{N}\ln\frac{k^2-t^2}{k^2}=\ln\left(\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{x^2}{k^2})\right).$$
On a vu que le produit infini est convergent. Le ajorant à droite est le reste d'une série convergente. On en déduit en passant à la limite
$$\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)=\ln\left(\prod_{k\geq1}(1-\frac{x^2}{k^2})\right)\Rightarrow\sin(\pi x)=\pi x\prod_{k\geq1}(1-\frac{x^2}{k^2}).$$
en composant par l'exponentielle (continue).