## Exercice I

Dans cet exercice, il sera utile de considérer diverses quantités conjuguées ainsi que des modules de nombres complexes. On utilisera librement le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On dira qu'une partie non vide $F$ de $\mathbb{C}$ est un *sous-corps de* $\mathbb{C}$ si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\forall (x,y) \in F^2 : x+y \in F, \qquad xy \in F$$
$$\forall x \in F : -x \in F$$
$$\forall x \in F \setminus \{0\} : \frac{1}{x} \in F$$

Si $F$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on dira qu'une partie $A$ de $\mathbb{C}$ est un sous-corps de $F$ si et seulement si $A$ et un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A \subset F$.
Si $B$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A$ un sous-corps de $B$, on désigne par $G_A(B)$ l'ensemble des bijections $f$ de $B$ dans lui même vérifiant :

$$\forall a \in A : f(a) = a$$
$$\forall (b,b') \in B : f(b+b') = f(b) + f(b'), \qquad f(bb') = f(b)f(b')$$

1. Montrer que l'ensemble
$$E = \left\{ a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$
est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. On définit une partie $F$ de $\mathbb{C}$ par :
$$F = \left\{ a + b\sqrt{2} + cj + dj\sqrt{2}, (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4 \right\}$$
avec $j = e^{2i\pi/3}$.
   a. Montrer que pour tout $z \in F$, il existe un *unique* quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$ tel que
   $$z = a + b\sqrt{2} + cj + dj\sqrt{2}$$
   b. Montrer que $F$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit $z$ et $z'$ deux éléments de $F$, préciser les coefficients $A(z,z')$, $B(z,z')$, $C(z,z')$, $D(z,z')$ tels que
   $$zz' = A(z,z') + B(z,z')\sqrt{2} + C(z,z')j + D(z,z')j\sqrt{2}$$
   c. Préciser l'inverse de $1 + \sqrt{2} + j + j\sqrt{2}$
3. Soit $A$ un sous-corps de $B$. Montrer que $G_A(B)$ est un sous-groupe du groupe des bijections de $B$ dans $B$ pour la composition des applications.
4. Soit $f$ un élément de $G_{\mathbb{Q}}(F)$.
Quelles valeurs peuvent prendre $f(\sqrt{2})$ et $f(j)$ ? Montrer que tout élément $f$ de $G_{\mathbb{Q}}(F)$ est déterminé par la donnée de $f(\sqrt{2})$ et $f(j)$. En déduire les éléments de $G_{\mathbb{Q}}(F)$ puis de $G_E(F)$.

## Exercice II

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n$ un entier naturel non nul. On appelle *zéro* d'une fonction définie dans $I$ un élément de $I$ en lequel la fonction prend la valeur nulle.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ admettant $n+1$ zéros distincts. Montrer que $f^{(n)}$ admet un zéro.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ telle que $f^{(n)}$ soit bornée avec $\sup_I |f^{(n)}| = M_n$ et admettant $n$ zéros distincts $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Montrer que :
$$\forall x \in I : |f(x)| \leq |x-a_1| \cdots |x-a_n| \frac{M_n}{n!}$$
On pourra considérer *des* fonctions
$$\varphi_x : \qquad t \rightarrow (t-a_1)\cdots(t-a_n)K_x - f(t)$$
avec $x \in I$ et $K_x$ réel.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ telle que $f^{(n)}$ soit bornée avec $\sup_I |f^{(n)}| = M_n$. Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des éléments deux à deux distincts dans $I$. Pour $i$ entre 1 et $n$, on note
$$L_i = \prod_{j \in \{1,\cdots,n\} \setminus \{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que
$$\forall i \in \{1,\cdots,n\}, \qquad \widetilde{P}(a_i) = f(a_i)$$
Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\widetilde{P}(x) - f(x)\right| \leq |x-a_1|\cdots|x-a_n| \frac{M_n}{n!}$$

## Exercice III

Dans cet exercice $G$ désigne un groupe dont l'opération est notée multiplicativement : pour tous $a$ et $b$ de $G$ le produit de $a$ par $b$ est simplement noté $ab$. On ne suppose pas que le groupe soit commutatif.
Pour une partie $A$ de $G$, on appelle *centralisateur* de $A$ la partie $\mathcal{C}(A)$ de $G$ définie par :

$$\forall x \in G,\ (x \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \forall a \in A, ax = xa)\,.$$

Dans la suite de l'exercice, quand on demande de comparer deux parties de $G$, il s'agit de prouver une inclusion entre ces deux parties.
La partie $A$ de $G$ est fixée pour la suite de l'exercice.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-groupe de $G$.
2. Soit $X$ et $Y$ deux parties de $G$ telles que $X \subset Y$. Comparer $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(Y)$.
3. Soit $X$ une partie quelconque de $G$, comparer $X$ et $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$.
4. Montrer que
$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))) = \mathcal{C}(A)$$

## Problème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$p_n = u_1 u_2 \cdots u_n$$

On dira que le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre *non nul*. Cette limite sera notée $\prod_{n\geq 1} u_n$. Si la suite $(p_n)$ ne converge pas, on dira que le produit diverge.

## I. Exemples.

1. Soit $u_k = 1 + \frac{1}{k}$.
Simplifiez $p_n$. Le produit $\prod_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n})$ est-il divergent ou convergent ?
2. Soit $u_k = \cos\frac{a}{2^k}$ avec $a \not\equiv 0 \mod \pi$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $p_n \sin\frac{a}{2^n}$. En déduire que le produit infini converge et préciser
$$\prod_{n\geq 1} \cos\frac{a}{2^n}.$$
3. Soit $u_k = 1 - \frac{1}{k^2}$ pour $k \geq 2$. Montrer que le produit infini converge et calculer
$$\prod_{n\geq 2}(1 - \frac{1}{n^2}).$$
4. Soit $a \in ]0,1[$ et $u_k = 1 + a^{(2^k)}$. Calculer $(1-a^2)p_n$. En déduire la convergence et la valeur du produit infini.

## II. Conditions.

1. Montrer que si le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
2. On suppose $u_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_0$.
Montrer que la convergence du produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ est équivalent à la convergence de la série $(\sum \ln(u_n))_{n\geq n_0}$. Dans ce cas, comment sont reliés la valeur du produit infini et la somme de la série ?
3. Montrer que, sous l'une des hypothèses suivantes
   - à partir d'un certain rang $n_0$, $u_n = 1 - v_n$ avec $0 < v_n < 1$,
   - à partir d'un certain rang $n_0$, $u_n = 1 + v_n$ avec $0 < v_n$,

   le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si la série $(\sum v_n)_{n\geq n_0}$ converge.

## III. Un expression de sin comme produit infini.

Dans cette partie, $x \in ]-1,1[$.

1. a. Montrer la convergence de la série $(\sum \frac{2x}{x^2-n^2})_{n\geq 1}$.
   b. Montrer la convergence du produit infini $\prod_{n\geq 1}(1 - \frac{x^2}{n^2})$.
2. Études locales.
   a. Former un développement asymptotique en 0 avec un reste en $o(t)$ de
   $$t \mapsto \pi\,\mathrm{cotan}(\pi t).$$
   b. Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction définie par :
   $$\forall t \in ]-1,+1[\setminus\{0\}\,,\ t \mapsto \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right).$$
   On note $f$ la fonction ainsi prolongée.

c. Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^1$ dans $]-1,+1[$ et préciser $f'$.

3. On admet la relation suivante
$$\forall x \in ]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2x}{x^2-n^2}.$$

a. Montrer que
$$\forall t \in ]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \frac{t}{n^2-t^2} \leq \frac{1}{n^2-1}$$

b. Montrer que
$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in ]-1,+1[\ \left| \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \sum_{n=1}^{N} \int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\,dt \right| \leq |x| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}.$$

c. En déduire
$$\forall x \in ]-1,+1[,\ \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$





Rémy Nicolai S0905E