Partie I. Une formule d'Euler.

1. L'ensemble $\mathcal{E}(x)$ est fini de cardinal $\lfloor x \rfloor$. L'ensemble $\mathcal{N}(x)$ est infini car $\mathcal{P}(x)$ est fini (de cardinal $\pi(x)$) mais les exposants des facteurs premiers sont arbitraires. En revanche si on limite les exposants (entre 0 et m) on obtient l'ensemble fini $\mathcal{N}_m(x)$ de cardinal $(m+1)^{\pi(x)}$.
   Pour x fixé, tous les facteurs premiers des éléments de $\mathcal{E}(x)$ sont dans $\mathcal{P}(x)$. Notons m le plus grand des exposants figurant dans ces décompositions. On a alors $\mathcal{E}(x) \subset \mathcal{N}_m(x)$. Comme $\mathcal{N}_m(x)$ est fini, il admet un plus grand élément y on a bien alors $\mathcal{N}_m(x) \subset \mathcal{E}(y)$. Pour des x, m, y vérifiant ces inclusions, on a $Z_x \leq S_m(x) \leq Z_y$.
2. Quand on développe le produit proposé, on obtient une somme de $(m+1)^{\pi(x)}$ termes. Notons $q = \pi(x)$, chaque terme est de la forme $\frac{1}{(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_q^{m_q})^\delta}$ avec $(m_1, \cdots, m_q) \in \{0, \cdots, m\}^q$.
   On obtient ainsi dans les dénominateurs tous les éléments de $\mathcal{N}_m(x)$ ce qui prouve la relation demandée.
3. a. L'encadrement demandé vient de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $x \to x^{1-\delta}$ entre j et $j+1$. Comme $\delta > 1$, la dérivée $(1-\delta)x^{-\delta}$ est croissante (elle est aussi à valeurs négatives). On en déduit :
$$(1-\delta)(j)^{-\delta} \leq (j+1)^{1-\delta} - j^{1-\delta} \leq (1-\delta)(j+1)^{-\delta}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\delta-1}{(j+1)^\delta} \leq \frac{1}{j^{\delta-1}} - \frac{1}{(j+1)^{\delta-1}} \leq \frac{\delta-1}{j^\delta}$$
   b. On somme les inégalités précédentes ; celle de gauche pour j entre 1 et $i-1$, puis celle de droite pour j entre 1 et i :
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\delta-1}{2^\delta} \leq \frac{1}{1^{\delta-1}} - \frac{1}{2^{\delta-1}} \\ \frac{\delta-1}{3^\delta} \leq \frac{1}{2^{\delta-1}} - \frac{1}{3^{\delta-1}} \\ \vdots \\ \frac{\delta-1}{i^\delta} \leq \frac{1}{(i-1)^{\delta-1}} - \frac{1}{i^{\delta-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow (\delta-1)(Z_i - 1) \leq 1 - \frac{1}{i^{\delta-1}}$$
$$\Rightarrow Z_i \leq \frac{1}{\delta-1} + 1 - \frac{1}{(\delta-1)i^{\delta-1}}$$
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1^{\delta-1}} - \frac{1}{2^{\delta-1}} \leq \frac{\delta-1}{1^\delta} \\ \frac{1}{2^{\delta-1}} - \frac{1}{3^{\delta-1}} \leq \frac{\delta-1}{2^\delta} \\ \vdots \\ \frac{1}{i^{\delta-1}} - \frac{1}{(i+1)^{\delta-1}} \leq \frac{\delta-1}{i^\delta} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - \frac{1}{(i+1)^{\delta-1}} \leq (\delta-1)Z_i$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\delta-1} - \frac{1}{(\delta-1)(i+1)^{\delta-1}} \leq Z_i$$
   c. La suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est clairement croissante par définition. La partie droite de l'encadrement précédent montre qu'elle est majorée par $\frac{1}{\delta-1} + 1$. Elle est donc convergente et on note $\zeta(\delta)$ sa limite.
   On utilise encore l'encadrement mais cette fois avec le théorème de passage à la limite dans une inégalité, on obtient :
$$\frac{1}{\delta-1} \leq \zeta(\delta) \leq \frac{1}{\delta-1} + 1$$
   car δ étant > 1 les termes en $\frac{1}{i^{\delta-1}}$ tendent vers 0.
   d. La suite $(S_m(x))_{m\in\mathbb{N}^*}$ est clairement croissante. D'après la première question, il existe un entier i tel que $S_m(x) \leq Z_i \leq \zeta(\delta)$. La suite est donc majorée donc convergente et sa limite $S(x)$ vérifie $S(x) \leq \zeta(\delta)$.
4. La suite est formée de sommes de termes d'une suite géométrique de raison $p^{-\delta} < 1$
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{p^{k\delta}} = \frac{1 - p^{-(m+1)\delta}}{1 - p^{-\delta}} \to \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\delta}}$$
5. Pour tout entier m et tout nombre premier p :
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{p^{k\delta}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\delta}}$$
   Considérons alors la suite $(S_m(x))_{m\in\mathbb{N}^*}$, d'après 1.
$$S_m(x) = \prod_{p\in\mathcal{P}(x)} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{p^{k\delta}} \right)$$

La suite considérée est donc le produit des $\pi(x)$ suites convergentes $\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{p^{k\delta}}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ pour p décrivant $\mathcal{P}(x)$. Le produit d'une famille finie de suites convergentes est convergente et sa limite est le produit des limites. On en déduit que

$$S(x)=\prod_{p\in\mathcal{P}(x)}\frac{1}{1-\frac{1}{p^\delta}}$$

La question 3.d. montre que, pour x fixé et m assez grand

$$Z_x\leq S_m(x)\leq\prod_{p\in\mathcal{P}(x)}\frac{1}{1-\frac{1}{p^\delta}}\leq\zeta(\delta)$$

Or Z_x tend vers $\zeta(\delta)$ en $+\infty$. Le théorème d'encadrement entraîne alors la convergence du produit avec

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{p\in\mathcal{P}(x)}\frac{1}{1-\frac{1}{p^\delta}}=\zeta(\delta)$$

Partie II. Constante d'Euler.

1. a. L'inégalité demandée résulte de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction ln entre i et $i+1$ en tenant compte de la décroissance de la dérivée.

   b. Par définition de u_n et d'après a. :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n\leq 0$$

   ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   c. On somme les inégalités droites du a.

$$\left.\begin{array}{ll}\ln 2-\ln 1 & \leq\frac{1}{1}\\ \ln 3-\ln 2 & \leq\frac{1}{2}\\ & \vdots\\ \ln n-\ln(n-1) & \leq\frac{1}{n-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\ln n\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\Rightarrow 0\leq u_n-\frac{1}{n}$$

   d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante d'après b et minorée par 0 (à valeurs positives) d'après c. Elle est donc convergente. On note γ sa limite. On pose $v_n=u_n-\gamma$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et à valeurs positives.

2. Notons $\varphi(x)$ l'expression dont on veut montrer qu'elle est positive. La fonction φ est $\mathcal{C}^\infty$ dans $[0,1[$ et nulle en 0. calculons la dérivée :

$$\varphi'(x)=\underbrace{1-\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x}}_{=0}+\frac{x^2}{2(1-x)^2}\geq 0$$

   La fonction φ est donc croissante, nulle en 0 ; elle est à valeurs positives.
   Calculons $\varphi(\frac{1}{n+1})$.

$$\varphi(\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}+\ln(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{2(n+1)^2(1-\frac{1}{n+1})}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ln(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{2(n+1)n}$$

3. Pour montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, formons $w_{n+1}-w_n$ avec

$$w_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-\gamma-\frac{1}{2n}$$

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n&=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-\frac{1}{2(n+1)}+\ln n+\frac{1}{2n}\\&=\frac{1}{n+1}+\ln\frac{(n+1)-1}{n+1}+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2n(n+1)}\geq 0\end{aligned}$$

   La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est obtenue à partir de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 0 en ajoutant un terme correctif $-\frac{1}{2n}$ qui converge vers 0. Comme elle est croissante, cela entraîne qu'elle est à valeurs négatives ou nulles ce qui donne l'inégalité à droite de l'encadrement demandé

$$0\leq Z_n-\ln n-\gamma\leq\frac{1}{2n}$$

   On avait déjà la positivité d'après 1.d.

4. Le raisonnement est très proche de celui des questions 2. et 3. Notons $\psi(x)$ l'expression dont on veut montrer qu'elle est positive. La fonction ψ est $\mathcal{C}^\infty$ dans $[0,1[$ et nulle en 0. Calculons la dérivée :

$$\psi'(x)=1-\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{2(1+x)^2}=-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^2}{2(1+x)^2}\leq 0$$

On en déduit

$$\psi(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \ln(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{2(n+1)^2(1+\frac{1}{n+1})}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ln(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq 0$$

Formons $t_{n+1} - t_n$ avec

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \frac{1}{2(n+2)} + \ln n + \frac{1}{2(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ln\frac{(n+1)-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq 0$$

Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en décroissant, elle est à valeurs positives. Cela donne l'inégalité à droite de l'encadrement suivant, l'inégalité à gauche venant de la question 3.

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq Z_n - \ln n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$$

En divisant par $\frac{1}{2n}$, les suites de chaque côté tendent vers 1 et on obtient par le théorème d'encadrement que

$$Z_n - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$$

Partie III. Valeur moyenne du nombre de diviseurs

1. La définition de la relation de domination est : il existe $A > 1$ et $M > 0$ tel que $\frac{|f(x)-g(x)|}{|h(x)|} \leq M$ pour tous les $x \geq A$.
2. Les disques situés sur l'hyperbole de Dirichlet sont associés aux diviseurs de x, chaque coordonnée est un diviseur, le nombre $\tau(x)$ de diviseurs de x est donc le nombre de disques sur l'hyperbole. Si x et y sont distincts, les hyperboles $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$ sont disjointes. Pour les points du plan à coordonnées entières situés au dessous de $\mathcal{H}_x$, les hyperboles $\mathcal{H}_y$ avec $0 < y \leq x$ forment une partition. On en déduit que la somme $D(x)$ des nombres de diviseurs des entiers plus petits que x est le nombre total de disques au dessous de l'hyperbole.

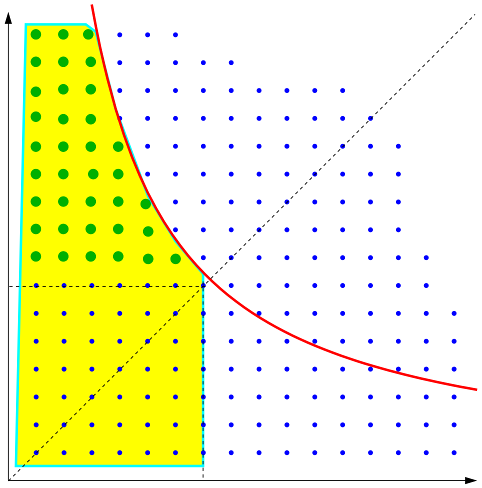

FIG. 1: III.2. $\mathcal{T} = \mathcal{C} \cup \mathcal{T}_1$.

Notons y l'ordonnée marquée par un point d'interrogation. On a $ym < x$ car le point est strictement au dessous de l'hyperbole et $(y+1)m > x$ d'ou $y < \frac{x}{m} < y+1$ donc

$$y = \lfloor\frac{x}{m}\rfloor$$

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des points à coordonnées entières en dessous de l'hyperbole et $\mathcal{C}$ le carré indiqué sur la figure. Il est formé par les couples d'entiers (m,k) tous les deux entre 1 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. On a donc $\sharp\mathcal{C} = \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2$.

Notons $\mathcal{T}$ la zone délimitée sur la figure 1. Elle est formée par les couples d'entiers (m,k) tels que $mk \leq x$ et $m < \sqrt{x}$. Chaque colonne de $\mathcal{T}$ d'abscisse m est constituée par les (m,k) avec k entre 1 et $\lfloor\frac{x}{m}\rfloor$ donc

$$\sharp\mathcal{T} = \sum_{m\in\mathcal{E}(\sqrt{x})} \lfloor\frac{x}{m}\rfloor$$

La partie $\mathcal{T}$ est l'union du carré $\mathcal{C}$ et de la partie au dessus notée $\mathcal{T}_1$ et représentée sur la figure par les plus gros disques. On peut définir une partie $\mathcal{T}_2$ symétrique de $\mathcal{T}_1$ par rapport à la bissectrice des axes. On a alors une union disjointe :

$$\mathcal{D} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{T}_2$$

Comme $\sharp\mathcal{T}_1 = \sharp\mathcal{T}_2$ et $\sharp\mathcal{T} = \sharp\mathcal{T}_1 + \sharp\mathcal{C}$, on obtient :

$$\sharp\mathcal{D} = 2\sharp\mathcal{T} - \sharp\mathcal{C} \Rightarrow D(x) = 2\sum_{m\in\mathcal{E}(\sqrt{x})} \lfloor \frac{x}{m} \rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2$$

3. Par définition de la partie entière et en sommant sur les $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ éléments de $\mathcal{E}(\sqrt{x})$:

$$\frac{x}{m} - 1 < \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \leq \frac{x}{m}$$
$$xZ_{\sqrt{x}} - \lfloor\sqrt{x}\rfloor \leq \sum_{m\in\mathcal{E}(\sqrt{x})} \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \leq xZ_{\sqrt{x}}$$

De $\lfloor\sqrt{x}\rfloor \leq \sqrt{x}$, on déduit l'encadrement demandé.

4. D'après les deux précédentes questions,

$$2xZ_{\sqrt{x}} - 2\lfloor\sqrt{x}\rfloor \leq D(x) + \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 \leq 2xZ_{\sqrt{x}}$$

Prouver le résultat revient à montrer que

$$\theta(x) = \sqrt{x}\left[\frac{D(x)}{x} - (\ln x + 2\gamma - 1)\right]$$

est borné au voisinage de $+\infty$.
D'après la question 2., on a

$$D(x) = 2\sum_{m\in\mathcal{E}(\sqrt{x})} \lfloor \frac{x}{m} \rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2$$

Donc par la question 3. :

$$2Z_{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x} \leq \frac{D(x)}{x} \leq 2Z_{\sqrt{x}} - \frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}.$$

Or $Z_{\sqrt{x}} = Z_{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}$, donc par II 4., $Z_{\sqrt{x}} = \ln\lfloor\sqrt{x}\rfloor + \gamma + \frac{\varepsilon(\lfloor\sqrt{x}\rfloor)}{2\lfloor\sqrt{x}\rfloor}$ avec $\varepsilon \to_{+\infty} 1$.
D'une part,

$$\theta(x) \leq \sqrt{x}\left[\ln\left(\frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right) + \frac{\varepsilon(\lfloor\sqrt{x}\rfloor)}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} + 1 - \frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right]$$

comme

* $\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 \leq x$ d'où $\sqrt{x}\ln\left(\frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right) \leq 0$.
* $\frac{\sqrt{x}}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\varepsilon(\lfloor\sqrt{x}\rfloor) \to_{+\infty} 1$ donc $\frac{\sqrt{x}}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\varepsilon(\lfloor\sqrt{x}\rfloor)$ est majoré au voisinage de $+\infty$.
* En minorant $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ par $\sqrt{x}-1$ on trouve que $\sqrt{x}\left(1 - \frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right) \leq 2$.

On en déduit que la fonction θ est majorée au voisinage de $+\infty$.
D'autre part,

$$\theta(x) \geq \sqrt{x}\left[\ln\left(\frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right) + \frac{\varepsilon(\lfloor\sqrt{x}\rfloor)}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} + 1 - \frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right]$$

or

* En minorant $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ par $\sqrt{x}-1$ on trouve que $\frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x} \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$, donc par croissance de ln, puis en multipliant par $\sqrt{x}$ on obtient $\sqrt{x}\ln\left(\frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right) \geq \sqrt{x}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$. Or $\sqrt{x}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \sim_{+\infty} -2$, et est donc minoré au voisinage de $+\infty$. Il en est donc de même pour $\sqrt{x}\ln\left(\frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right)$.
* $\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 \leq x$ d'où $\sqrt{x}\left(1 - \frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2}{x}\right) \geq 0$.
* $\frac{\sqrt{x}}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\varepsilon(\lfloor\sqrt{x}\rfloor) \to_{+\infty} 1$, $\frac{\sqrt{x}}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\varepsilon(\lfloor\sqrt{x}\rfloor)$ est donc minoré au voisinage de $+\infty$
* $-\sqrt{x}\left(\frac{2\sqrt{x}}{x}\right) = 2$.

On en déduit que la fonction θ est minorée au voisinage de $+\infty$.
La fonction θ est donc bornée au voisinage de $+\infty$.

Partie IV. Une inégalité de Chebychev

1. Par définition, $\theta(2) = \ln 2 < 2\ln 4 = \ln 16$.
2. Lorsque n est pair il n'est pas premier donc $\theta(n) = \theta(n-1) \leq (n-1)\ln 4 \leq n\ln 4$.
3. a. Le développement de $(1+1)^{2m+1}$ est une somme de coefficients du binôme qui contient en particulier

$$\binom{2m+1}{m} \text{ et } \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$$

On en déduit

$$2\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1} \Rightarrow \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$

b. Exprimons le coefficient du binôme avec des produits :

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)(2m)\cdots(m+1)}{m!}$$

Les hypothèses sur le nombre premier p montrent qu'il ne figure pas dans la décomposition de $m!$ mais qu'il apparait quelque part dans les facteurs du numérateur. Il divise donc ce coefficient du binôme.

c. Considérons $\theta(2m+1) - \theta(m+1)$. Il s'agit en fait d'une somme qui porte sur tous les nombres premiers p de $\mathcal{P}(2m+1) \setminus \mathcal{P}(m+1)$ c'est à dire vérifiant les inégalités de la question b.

$$\theta(2m+1) - \theta(m) = \sum_{p \in \mathcal{P}(2m+1)\setminus\mathcal{P}(m)} p = \ln\left(\prod_{p \in \mathcal{P}(2m+1)\setminus\mathcal{P}(m)} p\right)$$

Comme tous les nombres premiers p en jeu divisent le coefficient du binôme, leur produit le divise aussi. On en déduit

$$\prod_{p \in \mathcal{P}(2m+1)\setminus\mathcal{P}(m)} p \leq \binom{2m+1}{m} \Rightarrow \theta(2m+1) - \theta(m) \leq \ln\binom{2m+1}{m}$$

4. Il s'agit ici d'achever la démonstration par récurrence ébauchée dans les premières questions. Définissons d'abord précisément la proposition. Pour n naturel supérieur ou égal à 2 :

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \forall k \in \{2, \cdots, n\} : \theta(k) \leq k \ln 4$$

La proposition $(\mathcal{P}_2)$ qui ne fait intervenir que 2 a été montrée en question 1.
On veut maintenant montrer que $(\mathcal{P}_{n-1}) \Rightarrow (\mathcal{P}_n)$ pour $n \geq 3$.

- Le cas où n est pair a été traité en 2.
- Dans le cas où n est impair et de la forme $2m+1$, on utilise la question 3. À cause du choix de la proposition à démontrer (récurrence forte), il suffit de majorer $\theta(n)$:

$$\begin{aligned}\theta(n) = \theta(2m+1) = \theta(m) + (\theta(2m+1) - \theta(m)) &\leq m\ln 4 + \ln\binom{2m+1}{m} \\ &\leq m\ln 4 + \ln 4^m \leq 2m\ln 4 \leq n\ln 4\end{aligned}$$

On a utilisé au passage la majoration trouvée de 3.a.