On rappelle qu'aucune notion de « somme infinie » ou de « produit infini » ne figure dans le programme de MPSI. Aucun raisonnement faisant intervenir de telles notions ne sera pris en compte.

Dans tout ce problème[1], x et δ désignent des nombres réels strictement supérieurs à 1. On introduit diverses notations particulières.

- La partie entière de x est notée $\lfloor x \rfloor$. La partie fractionnaire de x est notée $\{x\}$. Par définition :
$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \qquad \{x\} \in [0, 1[$$
- L'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à x est noté $\mathcal{E}(x)$.
- L'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à x est noté $\mathcal{P}(x)$. Le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(x)$ est noté $\pi(x)$.
- L'ensemble des entiers dont la décomposition en facteurs premiers ne contient que des éléments de $\mathcal{P}(x)$ est noté $\mathcal{N}(x)$.
- Pour tout entier naturel non nul m, l'ensemble des entiers dont la décomposition en facteurs premiers ne contient que des éléments de $\mathcal{P}(x)$ avec des exposants inférieurs ou égaux à m est noté $\mathcal{N}_m(x)$.
- Pour tout $\delta \geq 1$ fixé, on définit :

$$Z_x = \sum_{n \in \mathcal{E}(x)} \frac{1}{n^\delta} \qquad S_m(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}_m(x)} \frac{1}{n^\delta}$$

Partie I. Une formule d'Euler.

Dans cette partie $\delta > 1$ et $x \geq 2$.

1. Parmi les ensembles $\mathcal{E}(x)$, $\mathcal{N}(x)$, $\mathcal{N}_m(x)$ lesquels sont finis ? Pour chacun de ceux là, préciser le cardinal avec les notations de l'énoncé.
Montrer que, pour x fixé, il existe un entier m à préciser tel que $\mathcal{E}(x) \subset \mathcal{N}_m(x)$.
Montrer que, pour x et m fixés, il existe un $y > 1$ à préciser tel que $\mathcal{N}_m(x) \subset \mathcal{E}(y)$?
Que peut-on en déduire pour les sommes $S_m(x)$, Z_x, Z_y ?
2. Montrer que
$$\prod_{p \in \mathcal{P}(x)} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{p^{k\delta}} \right) = S_m(x)$$
3. Étude de la suite $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

a. Pour tout entier naturel non nul j, montrer que
$$\frac{\delta - 1}{(j+1)^\delta} \leq \frac{1}{j^{\delta-1}} - \frac{1}{(j+1)^{\delta-1}} \leq \frac{\delta - 1}{j^\delta}$$

b. Montrer que
$$\frac{1}{\delta - 1} - \frac{1}{(\delta - 1)(i+1)^{\delta-1}} \leq Z_i \leq \frac{1}{\delta - 1} + 1 - \frac{1}{(\delta - 1) i^{\delta-1}}$$

c. Montrer que la suite $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\zeta(\delta)$ sa limite[2]. Montrer que
$$\frac{1}{\delta - 1} \leq \zeta(\delta) \leq \frac{1}{\delta - 1} + 1$$

d. Pour x fixé, montrer que la suite $(S_m(x))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $S(x)$ sa limite. Montrer que
$$S(x) \leq \zeta(\delta)$$

4. Soit p un nombre premier, montrer que la suite
$$\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{p^{k\delta}} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$$
est convergente et préciser sa limite.
5. Montrer que :
$$Z_x \leq \prod_{p \in \mathcal{P}(x)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\delta}} \leq \zeta(\delta)$$
En déduire une formule d'Euler :
$$\lim_{x \to \infty} \prod_{p \in \mathcal{P}(x)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\delta}} = \zeta(\delta)$$

Partie II. Constante d'Euler.

Dans cette partie on prend $\delta = 1$ et on note
$$Z_x = \sum_{n \in \mathcal{E}(x)} \frac{1}{n}$$

[1] d'après *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, G. Tenenbaum

[2] il s'agit de la très célèbre fonction zeta de Riemann

1. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = Z_n - \ln n$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel non nul i :
   $$\frac{1}{i+1} \leq \ln(i+1) - \ln(i) \leq \frac{1}{i}$$
   b. Déduire de la question a. que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   c. Déduire de la question a. que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leq u_n$$
   d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite[3] et $v_n = u_n - \gamma$ pour tout naturel non nul n.
2. Montrer que
   $$\forall x \in [0,1[: x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2(1-x)} \geq 0$$
   En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \; : \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n(n+1)} \geq 0$$
3. Pour tout naturel non nul n, on pose $w_n = v_n - \frac{1}{2n}$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante puis que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq Z_n - \ln n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$$
4. Montrer que
   $$\forall x \in [0,1[: x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2(1+x)} \leq 0$$
   En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \; : \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq 0$$
   puis que la suite $\left(v_n - \frac{1}{2(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Montrer l'équivalence des suites :
   $$Z_n - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$$

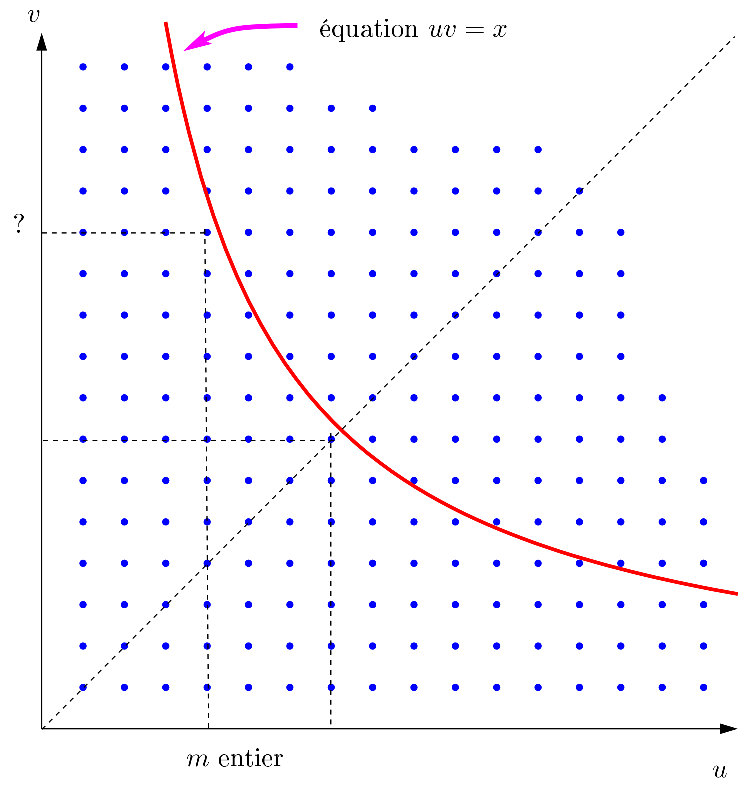

Fig. 1: Hyperbole de Dirichlet

Partie III. Valeur moyenne du nombre de diviseurs.

Dans cette partie, $\delta = 1$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n et $D(x)$ la somme des nombres de diviseurs des entiers inférieurs ou égaux à x. On se propose de montrer que, en $+\infty$,

$$\frac{D(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n\in\mathcal{E}(x)} \tau(n) = \ln x + 2\gamma - 1 + O(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

1. Question de cours.
   Soient f, g, h des fonctions définies dans $]1,+\infty[$ et qui ne s'annulent pas. Énoncer la définition de :
   $$\text{en } +\infty : \qquad f(x) = g(x) + O(h(x))$$
2. Sur la figure 1, les points représentés par les petits disques sont à coordonnées entières et on note $\mathcal{H}_x$ la courbe (hyperbole de Dirichlet). Comment s'interprètent $\tau(x)$ et $D(x)$ pour cette figure ? Préciser l'ordonnée marquée par un point d'interrogation.
   Montrer que :
   $$2\sum_{m\in\mathcal{E}(\sqrt{x})} \lfloor \frac{x}{m} \rfloor = D(x) + \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2$$
3. Montrer que
   $$xZ_{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \leq \sum_{m\in\mathcal{E}(\sqrt{x})} \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \leq xZ_{\sqrt{x}}$$
4. Former un encadrement montrant le résultat annoncé.

Partie IV. Une inégalité de Chebychev.

On se propose dans cette partie de montrer l'inégalité de Chebychev :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \theta(n) \leq n\ln 4 \qquad \text{avec} \qquad \theta(n) = \sum_{p\in\mathcal{P}(n)} \ln p$$

1. Montrer ce résultat pour $n = 2$.
2. Montrer que si $n \geq 4$ est pair et si l'inégalité est vraie au rang $n-1$ alors elle l'est au rang n.
3. On suppose maintenant que n est impair et on l'écrit $n = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$.
   a. En considérant le développement de $(1+1)^{2m+1}$, montrer que
   $$\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$
   b. Soit p un nombre premier vérifiant $m+1 < p \leq 2m+1$.
   Montrer que p divise $\binom{2m+1}{m}$.
   c. En déduire que
   $$\theta(2m+1) - \theta(m+1) \leq \ln\binom{2m+1}{m}$$
4. Montrer que l'inégalité est vraie pour tout naturel non nul $n \geq 2$.

[3]constante d'Euler