Problème 1.

Partie I. Propriétés trigonométriques.

1. a. En utilisant la définition :

$$T_2 = 2X^2 - 1 \qquad T_3 = 4X^3 - 3X$$

b. On démontre par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : \begin{cases} \deg(T_n) = n \\ \text{coefficient dominant de } T_n = 2^{n-1} \\ \widehat{T_n}(-X) = (-1)^n T_n \end{cases}$$

La dernière relation signifie que T_n est "de même parité" que n.

2. Écrivons d'abord une relation entre exponentielles :

$$e^{i(n+2)\theta} + e^{in\theta} = e^{i(n+1)\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = 2\cos\theta e^{i(n+1)\theta}$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta$$

De même :

$$e^{(n+2)\theta} + e^{n\theta} = e^{(n+1)\theta}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right) = 2\operatorname{ch}\theta e^{(n+1)\theta}$$

En prenant la partie paire de l'expression considérée comme une fonction de θ, on obtient

$$\operatorname{ch}(n+2)\theta + \operatorname{ch} n\theta = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}(n+1)\theta$$

Il sera utile pour la question 3. d'écrire ces formules comme :

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \qquad \operatorname{ch}(n+1)\theta = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch} n\theta - \operatorname{ch}(n-1)\theta$$

3. a. Utilisons une récurrence forte. Introduisons la propriété

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \forall k \in \{0, \cdots, n\}, \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \widetilde{T_n}(\cos x) = \cos(nx) \\ \widetilde{T_n}(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx) \end{cases}$$

Cette propriété est vérifiée pour $n = 1$. La relation de récurrence $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ et les factorisations de la question 2. montrent que $\mathcal{P}_{n-1}$ entraine $\mathcal{P}_n$.

b. Pour tout nombre réel u tel que $|u| \leq 1$, il existe des réels x tels que $u = \cos x$. Alors

$$\left|\widetilde{T_n}(u)\right| = \left|\widetilde{T_n}(\cos x)\right| = |\cos(nx)| \leq 1$$

Pour tout nombre réel $u > 1$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $u = \operatorname{ch} x$. Alors

$$\left|\widetilde{T_n}(u)\right| = \left|\widetilde{T_n}(\operatorname{ch} x)\right| = |\operatorname{ch}(nx)| = \operatorname{ch}(nx) > 1$$

Pour tout nombre réel $u < -1$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $u = -\operatorname{ch} x$. Alors

$$\left|\widetilde{T_n}(u)\right| = \left|\widetilde{T_n}(-\operatorname{ch} x)\right| = \left|(-1)^n\widetilde{T_n}(\operatorname{ch} x)\right| = \left|\widetilde{T_n}(\operatorname{ch} x)\right| = \operatorname{ch}(nu) > 1$$

4. a. D'après les questions précédentes :

$$\widetilde{T_n}(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos nx = 0 \Leftrightarrow nx \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Pour les racines dans $[0, \pi]$, on doit se limiter aux $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. On obtient donc n racines distinctes car la restriction de cos dans cet intervalle est injective.

b. La restriction à $[0, \pi]$ de la fonction cos est strictement décroissante, les $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ prennent donc n valeurs distinctes qui sont toutes des racines de T_n. Comme T_n est de degré n elles forment l'ensemble de *toutes* les racines de T_n.
À cause du caractère décroissant, pour numéroter les racines dans l'ordre croissant, il faut "inverser" les indices.
Lorsque k croît de 0 à $n-1$ alors $k' = n-k$ décroît de n à 1 et les cos augmentent.
En revenant à la lettre k pour désigner l'indice, on obtient que les n racines de T_n sont les

$$x_k = \cos\frac{2(n-k)+1}{2n}\pi = -\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \text{ avec } k \in \{1, \cdots n\}$$

Partie II. Sommes et produits de racines.

1. Dans la partie I, on a vu que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. Comme les racines de T_n sont $x_1, \cdots, x_n$, la décomposition en facteurs irréductibles s'écrit

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$$

Rémy Nicolai S0907C

La deuxième égalité est de nature trigonométrique.

$$\cos nx = \operatorname{Re}(\cos x + i\sin x)^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(\cos x)^{n-l}(i\sin x)^l\right) \text{ (binôme)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}(\cos x)^{n-2k}(-1)^k(\sin x)^{2k} \text{ (seuls les indices pairs contribuent)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}(\cos x)^{n-2k}(\cos^2 x - 1)^k$$

car $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$.
Rappelons que dans cette question n est pair : $n = 2p$.
Définissons un polynôme Q_n par :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}X^{n-2k}(X^2-1)^k$$

On a $\widetilde{Q_n}(\cos x) = \cos nx = \widetilde{T_n}(\cos x)$. Ainsi le polynôme $T_n - Q_n$ admet une infinité de racines ; à savoir toutes les valeurs du cos c'est à dire $[-1,+1]$. Ce polynôme doit donc être nul et

$$T_n = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}X^{n-2k}(X^2-1)^k$$

2. a. Ici encore, n est pair égal à $2p$ et la parité de T_n se lit très bien sur la deuxième expression qui ne contient que des puissances paires de X. On en déduit que $\sigma_1 = 0$. On aurait pu remarquer aussi que les racines vont par paires. Chaque racine peut être appariée à son opposée, la somme de toutes est donc nulle.
Le calcul du σ_n se fait en cherchant les termes de degré 0 dans la somme. Ils ne peuvent venir que du seul $k = p$. On a donc

$$\text{terme de degré 0 de } T_n = \binom{n}{2p}(-1)^p = 2^{n-1}(-1)^n\sigma_n = 2^{n-1}(-1)^n\pi_n$$

On en déduit :

$$\sigma_n = \pi_n = (-1)^p\, 2^{1-n}$$

Le calcul du σ_2 est plus compliqué car tous les termes de la somme contribuent :

$$\text{terme degré } n-2 \text{ de } T_n = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}(\text{terme degré } 2k-2 \text{ de } (X^2-1)^k)$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}(-k) \quad \text{(formule du binôme)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}2k = -\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{2k-1} \quad \text{(rel. coeff. binôme)}$$

La somme de tous les $\binom{n-1}{i}$ est égale à $(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$. La différence entre les sommes pour les indices pairs et impairs est nulle. On en déduit que ces deux sommes sont égales entre elles et valent 2^{n-2}. On obtient donc :

$$\text{terme degré } n-2 \text{ de } T_n = -n\, 2^{2n-3} = 2^{n-1}\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = -\frac{n}{4}$$

b. Pour les polynômes symétriques en général : $s_n = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Dans notre cas particulier, on obtient, en revenant à l'expression des racines :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi = \frac{n}{2}$$

3. On peut calculer s_n directement à partir de l'expression avec les racines

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi$$

On commence par linéariser les $\cos^2$:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

On obtient alors

$$s_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{n}\pi$$

On utilise ensuite l'exponentielle, la partie réelle et une somme de termes en progression géométrique ou les propriétés des racines n-èmes de l'unité

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{n}\pi = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{i\frac{2k-1}{n}\pi}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{-\frac{i\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n\right) = 0$$

car la somme la plus à droite est formée par les racines n-èmes de l'unité.

Partie III. Minimalité.

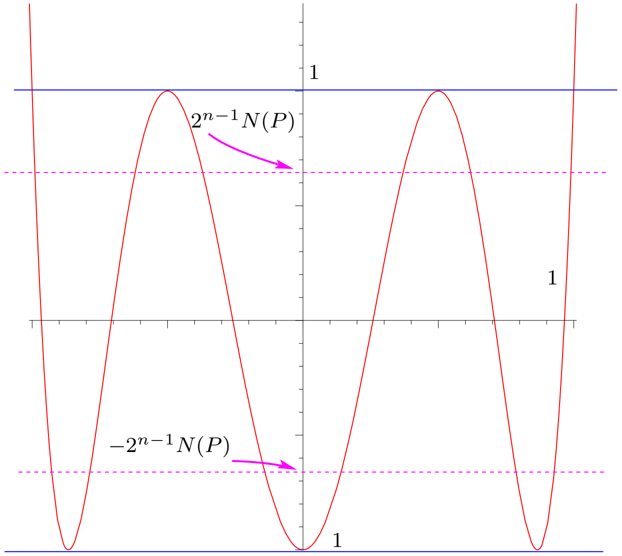

Fig. 1: Graphe de T_6

1. a. L'ensemble $\mathcal{U}_n$ n'est évidemment pas un sous-espace vectoriel, il n'est pas stable par la multiplication par un réel car le coefficient dominant est multiplié aussi.

   b. La fonction polynomiale associée à un polynôme est continue. Sa restriction au segment $[-1,1]$ est donc bornée et atteint ses bornes. On peut donc poser
$$N(P) = \max\left\{\left|\widetilde{P}(x)\right|, x \in [-1,1]\right\}$$
Si la fonction polynomiale est nulle sur le segment, le polynôme admet une infinité de racines, il doit donc être nul. Ainsi pour un polynôme non nul $N(P) > 0$.

   c. L'ensemble $\{N(P), P \in \mathcal{U}_n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure m_n. Il n'est absolument pas évident que cette borne soit le plus petit élément, c'est l'objet des questions suivantes.

2. Le polynôme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, de plus il vérifie : $|\widetilde{T_n}(x)| \leq 1$ pour tous les $x \in [-1,1]$ et il atteint plusieurs fois les valeurs 1 et -1 (ce point sera détaillé dans la question3.a.). On en déduit que pour le polynôme *unitaire* $2^{1-n}T_n$:
$$N(2^{1-n}T_n) = 2^{1-n} \Rightarrow m_n \leq 2^{1-n}$$

3. a. Comme en I, on utilise $\widetilde{T_n}(\cos x) = \cos nx$.
$$\cos nx = 1 \Leftrightarrow nx \equiv 0 \mod 2\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x = \frac{2k\pi}{n}$$
On se limite à $[0,\pi]$ pour assurer l'injectivité du cos.
Le polynôme $T_n - 1$ admet donc $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ racines qui sont les
$$\cos \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$
De même
$$\cos nx = -1 \Leftrightarrow nx \equiv \pi \mod 2\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x = \frac{(2k+1)\pi}{n}$$
Le polynôme $T_n + 1$ admet donc $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ racines qui sont les
$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ avec } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$$
Remarquons de plus que $\widetilde{T_n}(1) = \cos 0 = 1$. Il est évident à cause des monotonies des restrictions des cos que ces racines s'entremèlent. Pour les disposer précisément, il est commode de séparer les cas pairs et impairs. La valeur 1 est atteinte aux y_i, la valeur -1 est atteinte aux z_i

n	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$	racines
$2p$	$p+1$	p	$y_1 = -1 < z_1 < y_2 < \cdots < z_p < y_{p+1} = 1$
$2p+1$	$p+1$	$p+1$	$z_1 = -1 < y_1 < z_2 < \cdots < z_{p+1} < y_{p+1} = 1$

   b. Dans les deux cas, on obtient $n+1$ racines qui forment n intervalles. De l'hypothèse $N(P) < 2^{-n+1}$, on tire que $2^{n-1}P$ ne prend (en module) que des valeurs strictement plus petites que 1. Le polynôme $T_n - 2^{n-1}P$ admettra donc au moins n racines. Or ce polynôme est de degré strictement plus petit car les coefficients de degré n s'annulent.

c. D'après la question précédente, 2^{-n+1} est un minorant de $\{N(P), P \in \mathcal{U}_n\}$ ce qui entraine l'inégalité manquante $2^{-n+1} \leq m_n$ car la borne inférieure est le plus grand des minorants.

4. a. La fonction suivante répond aux conditions demandées

$$t \to \frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2}$$

b. À partir du polynôme P vérifiant l'hypothèse, formons un polynôme Q :

$$Q = \widehat{P}(\frac{a+b}{2} + X\,\frac{b-a}{2})$$

Ce polynôme est de degré p et de coefficient dominant $(\frac{b-a}{2})^p$. De plus, par construction, il vérifie :

$$\forall x \in [-1,1] : \left|\widetilde{Q}(x)\right| \leq 2$$

Formons un polynôme unitaire et appliquons le résultat de 3.

$$N\left(\frac{2^p}{(b-a)^p}Q\right) \leq \frac{2^{p+1}}{(b-a)^p} \Rightarrow 2^{-p+1} \leq \frac{2^{p+1}}{(b-a)^p} \Rightarrow (b-a)^p \leq 2^{2p} \Rightarrow b-a \leq 4$$

Problème 2.

1. Par des propriétés de cours : $\dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X] = \alpha+\beta$ et

$$\dim\left(\mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X]\right) = \dim \mathbb{R}_{\beta-1}[X] + \dim \mathbb{R}_{\beta-1}[X] = \alpha+\beta$$

On remarque que

$$\dim\left(\mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X]\right) = \dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X].$$

Ce qui jouera un rôle par la suite.

2. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\to \widetilde{P}(a) \end{aligned}$$

est linéaire et à valeurs dans le corps de base $\mathbb{R}$. C'est une forme linéaire non nulle car l'image du polynôme 1 de degré 0 est non nulle. Son noyau $\mathcal{N}_a$ est donc un hyperplan. Sa dimension est

$$\dim \mathcal{N}_a = \dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X] - 1 = \alpha+\beta-1.$$

3. Si Q est nul $\mathcal{M}(Q)$ est réduit au vecteur nul, c'est évidemment un sous-espace vectoriel. Il est de dimension 0 par convention et ne possède pas de base. Lorsque Q est non nul, soit q son degré et considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1-q}[X] &\to \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X] \\ P &\to PQ. \end{aligned}$$

Elle est bien définie car le degré d'un produit est la somme des degré. Elle est linéaire et injective car l'anneau des polynômes est intègre. De plus $\mathcal{M}(Q)$ est l'espace vectoriel image. Par injectivité la dimension est conservée donc

$$\dim \mathcal{M}(Q) = \dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1-q}[X] = \alpha+\beta-q.$$

4. La linéarité de Φ est évidente.

5. a. – Démonstration 1. On va démontrer en fait

$$A \wedge B \neq 1 \Rightarrow \Phi \text{ non injective.}$$

Soit M un diviseur commun à A et B de degré non nul. Il existe A_1 et B_1 dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $A = MA_1$ et $B = MB_1$. Ils vérifient $\deg A_1 < \alpha$ et $\deg B_1 < \beta$ donc $(B_1, -A_1) \in \mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X]$ est un élément non nul du noyau de Φ.

– Démonstration 2. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$\begin{aligned} \Phi \text{ injective } &\Rightarrow \Phi \text{ surjective} \\ &\Rightarrow \exists (P,Q) \in \mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X] \text{ tq } PA + QB = 1 \\ &\Rightarrow A \wedge B = 1 \quad \text{(d'après le théorème de Bezout).} \end{aligned}$$

b. – Démonstration 1. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$\Phi \text{ surjective } \Rightarrow \Phi \text{ injective } \Rightarrow A \wedge B = 1 \quad \text{(d'après a).}$$

– Démonstration 2.

$$\begin{aligned} \Phi \text{ surjective } &\Rightarrow \exists (P,Q) \in \mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X] \text{ tq } PA + QB = 1 \\ &\Rightarrow A \wedge B = 1 \quad \text{(d'après le théorème de Bezout).} \end{aligned}$$

c. – Démonstration 1. On suppose $A \wedge B = 1$. On considère $(P,Q) \in \ker \Phi$ donc $PA + QB = 0$ avec $\deg P < \beta$ et $\deg Q < \alpha$. Alors

$$\left.\begin{aligned} &A \text{ divise } QB \\ &A \wedge B = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \text{ divise } Q \qquad \text{(d'après thm. de Gauss).}$$

Comme $\deg Q < \alpha = \deg A$ ceci n'est possible que si Q est nul ce qui entraine que $\ker \Phi$ est réduit au vecteur nul donc Φ est injective.

– Démonstration 2. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$A \wedge B = 1 \Rightarrow \Phi \text{ surjective} \qquad \text{(d'après d)} \Rightarrow \Phi \text{ injective .}$$

d. – Démonstration 1. On suppose A et B premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe des polynômes P_0 et Q_0 tels que $P_0A + Q_0B = 1$.
Pour n'importe quel polynôme $S \in \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X]$, il existe des polynômes P_1 et Q_1 tels que $P_1A + Q_1B = S$. On peut prendre par exemple $P_1 = SP_0$ et $Q_1 = SQ_0$. Mais ces polynômes peuvent avoir un degré trop élevé.
Écrivons une division euclidienne de P_1 par B :

$$P_1 = TB + P \text{ avec } \deg(P) < \beta.$$

Définissons Q par $Q = Q_1 + TA$. Alors $PA + QB = S$ avec $\deg(P) < \beta$.
Il reste à vérifier la condition ($< \alpha$) sur le degré de Q pour prouver que (P,Q) est un antécédent de S par Φ.

$$\left.\begin{aligned} \deg(PA) = \deg P + \deg A &< \alpha + \beta \\ \deg S &< \alpha + \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \deg(QB) = \deg(S - PA) < \alpha + \beta$$
$$\Rightarrow \deg Q + \deg A < \alpha + \beta \Rightarrow \deg Q < \alpha.$$

– Démonstration 2. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$A \wedge B = 1 \Rightarrow \Phi \text{ injective} \qquad \text{(d'après c)} \Rightarrow \Phi \text{ surjective .}$$

6. D'après le théorème de Bezout, l'image de Φ est l'ensemble $\mathcal{M}(A \wedge B)$ des multiples du pgcd. On en déduit le rang de Φ par la question 3. qui conduit au résultat demandé

$$\operatorname{rg} \Phi = \alpha + \beta - \deg(A \wedge B) \Rightarrow \deg(A \wedge B) = \alpha - \beta - \operatorname{rg} \Phi.$$