Dans ce DS, la clarté de la présentation et la qualité de la présentation seront prises en compte dans le barême.

Problème 1.

L'objet de ce problème est d'établir certaines propriétés de polynômes particuliers dits *polynômes de Tchebychev* de première espèce.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et (pour tout entier naturel n) par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$, on désigne par $\widetilde{P}(a)$ le résultat du remplacement de X par a dans l'expression de P.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Partie I. Propriétés trigonométriques.

1. a. Déterminer les polynômes T_2 et T_3.
   b. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Factoriser $\cos((n+2)x) + \cos(nx)$ et $\operatorname{ch}((n+2)x) + \operatorname{ch}(nx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Les démonstrations devront *obligatoirement* utiliser des exponentielles.
3. a. Établir, pour tout nombre réel x et tout entier naturel n :
   $$\widetilde{T_n}(\cos x) = \cos(nx), \qquad \widetilde{T_n}(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$$
   b. Montrer que, pour tout nombre réel u :
   $$|u| \leq 1 \Rightarrow \left|\widetilde{T_n}(u)\right| \leq 1, \qquad |u| > 1 \Rightarrow \left|\widetilde{T_n}(u)\right| > 1$$
4. a. Pour tout n entier naturel non nul, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation
   $$\widetilde{T_n}(\cos(x)) = 0$$
   b. Montrer que, pour n entier naturel non nul, T_n admet n racines. Préciser ces racines, elles seront notées $x_1, \cdots, x_n$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Partie II. Sommes et produits de racines.

Dans cette partie, on suppose n pair non nul avec $n = 2p$. On note $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires formés avec les $x_1, \cdots, x_n$ ainsi que

$$s_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2, \qquad \pi_n = x_1 \cdots x_n$$

1. Montrer que
   $$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} X^{2p-2k}(X^2-1)^k$$
2. a. Préciser les trois coefficients $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$. En déduire π_n.
   b. Exprimer s_n en fonction des $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$. En déduire une expression simple de s_n.
3. Proposer une autre méthode pour calculer s_n. On demande seulement les principes et les articulations de ce calcul sans le réaliser explicitement.

Partie III. Minimalité.

Dans cette partie n est un entier non nul fixé. On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes *unitaires* à coefficients réels et de degré n.

1. a. L'ensemble $\mathcal{U}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?
   b. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose
   $$N(P) = \max\left\{\left|\widetilde{P}(x)\right|, x \in [-1, 1]\right\}$$
   Pourquoi peut-on le faire ? Montrer que $N(P) > 0$ si P n'est pas le polynôme nul.
   c. On considère maintenant
   $$m_n = \inf\{N(P), P \in \mathcal{U}_n\}$$
   Pourquoi peut-on le faire ?
2. Montrer que $m_n \leq 2^{-n+1}$.
3. a. Déterminer les racines des polynômes $T_n - 1$ et $T_n + 1$ dans $[-1, 1]$ sous la forme de suites croissantes $y_1, y_2, \cdots$ et $z_1, z_2, \cdots$. Préciser les inégalités entre les y_i et les z_j.

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n tel que $N(P) < 2^{-n+1}$.
Montrer que l'on aboutit à une contradiction en étudiant les racines de

$$2^{n-1}P - T_n$$

c. En déduire :

$$m_n = 2^{-n+1} = \min\{N(P), P \in \mathcal{U}_n\}$$

4. a. Soient a et b deux réels avec $a < b$, définir une bijection affine (c'est à dire une fonction polynomiale de degré au plus 1) strictement croissante de $[-1, 1]$ dans $[a, b]$.

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $p \geq 1$ tel que $|\widetilde{P}(x)| \leq 2$ pour tous les $x \in [a, b]$.
Montrer que

$$b - a \leq 4$$

Problème 2.

Dans ce problème, α et β sont des entiers naturels non nuls. Lorsque $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{C}_k[X]$ l'ensemble formé par le polynôme nul et les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k.
On considère deux polynômes à coefficients complexes A et B respectivement de degré α et β. Le plus grand diviseur commun à A et B est noté $A \wedge B$.
On définit une fonction Φ par :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{C}_{\alpha-1}[X] \to \mathbb{C}_{\alpha+\beta-1}[X] \\ (P, Q) \to PA + QB \end{cases}$$

1. Préciser les dimensions de $\mathbb{C}_{\alpha+\beta-1}[X]$ et $\mathbb{C}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{C}_{\alpha-1}[X]$.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{N}_a$ la partie de $\mathbb{C}_{\alpha+\beta-1}[X]$ formée par les polynômes admettant a pour racine.
Montrer que $\mathcal{N}_a$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_{\alpha+\beta-1}[X]$. Quelle est sa dimension ?
3. Soit $Q \in \mathbb{C}_{\alpha+\beta-1}[X]$ et $\mathcal{M}(Q)$ la partie de $\mathbb{C}_{\alpha+\beta-1}[X]$ formée par les multiples de Q.
Montrer que $\mathcal{M}(Q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_{\alpha+\beta-1}[X]$. Quelle est sa dimension ?
4. Montrer que Φ est linéaire.
5. Montrer les implications suivantes puis conclure.

$$\begin{array}{cr} (a) & \Phi \text{ injective } \Rightarrow A \wedge B = 1 \\ (b) & \Phi \text{ surjective } \Rightarrow A \wedge B = 1 \\ (c) & A \wedge B = 1 \Rightarrow \Phi \text{ injective} \\ (d) & A \wedge B = 1 \Rightarrow \Phi \text{ surjective} \end{array}$$

Pour chaque implication, vous devrez présenter deux démonstrations différentes.
6. Montrer que :

$$\deg(A \wedge B) = \alpha + \beta - \mathrm{rg}(\Phi)$$