Exercice

Décomposons en éléments simples la fraction
$$\frac{4X-3}{X(X-2)(X+2)}$$
il vient :
$$\frac{4X-3}{X(X-2)(X+2)} = \frac{1}{8}\left(\frac{6}{X} - \frac{11}{X+2} + \frac{5}{X-2}\right)$$
On en déduit
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{4k-3}{k(k-2)(k+2)} = \frac{1}{8}\left(6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - 11\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} + 5\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - 11\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k} + 5\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\right)$$
Comme $6-11+5=0$, les termes des sommes entre 5 et $n-2$ disparaissent. Il reste :
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{4k-3}{k(k-2)(k+2)} = \frac{1}{8}\left(6(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + 5(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) - \varepsilon_n\right)$$
où ε_n est formé de termes qui tendent vers 0. On en déduit que
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{4k-3}{k(k-2)(k+2)} \to \frac{1}{8}\left(6(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + 5(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\right) = \frac{167}{96}$$

Problème

Partie I. Existence : méthode de Picard

1. a. Le calcul de l'intégrale conduit à
$$y_1(t) = \frac{t^3}{6}$$

b. Par définition, comme les bornes de l'intégrales sont égales :
$$\forall n \in \mathbb{N} : y_n(0) = 0$$
Toutes les fonctions sont polynomiales par le calcul explicite des intégrales. Elles sont toutes dérivables avec :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} : y'_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + y_n^2(t)\right) \geq 0$$
Ce qui entraine la croissance de chaque fonction y_n.

c. Comme chaque y_n est croissante, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1] : 0 = y_n(0) \leq y_n(t) \leq y_n(1)$$
Avec $y_0(0) = 0$ et $y_1(1) = \frac{1}{6}$ tous les deux inférieurs à 1. Supposons $y_n(1) \leq 1$, alors :
$$\forall t \in [0,1] : y_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\underbrace{\tau^2}_{\leq 1} + \underbrace{y_n^2(\tau)}_{\leq 1}\Big) d\tau \leq 1$$

2. La question précédente portait sur le comportement pour chaque n de la *fonction* y_n. Celle ci en revanche porte, pour chaque t, sur la *suite* $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$.

a. On va montrer par récurrence que la suite est croissante. On sait déjà que les deux premiers termes sont dans le bon sens :
$$\forall t \in [0,1] : y_1(t) - y_0(t) = \frac{t^3}{6} \geq 0.$$
Supposons que pour un $n \geq 1$ et tous $t \in [0,1]$: $y_n(t) - y_{n-1}(t) \geq 0$. Alors :
$$y_{n+1}(t) - y_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(y_n^2(\tau) - y_{n-1}^2(\tau)\Big) d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\underbrace{y_n(\tau) + y_{n-1}(\tau)}_{\geq 0}\Big)\Big(\underbrace{y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)}_{\geq 0}\Big) d\tau \geq 0$$
On en déduit que pour chaque $t \in [0,1]$, la suite $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est majorée par 1 d'après la première question, elle est donc convergente. Sa limite est notée $y(t)$ ce qui *définit* une fonction y dans $[0,1]$. Il s'agit maintenant de prouver que cette fonction est effectivement solution de l'équation différentielle.

b. De l'encadrement $0 \leq y_n(t) \leq 1$, on déduit par le théorème de passage à la limite dans une inégalité pour la suite $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ que $0 \leq y(t) \leq 1$.

c. Soit a et b dans $[0,1]$, on choisit $a < b$ pour fixer les idées. Par définition de y_n et parce que la fonction y_{n-1} est croissante avec $y_{n-1}(1) \leq 1$, on a :

$$0 \leq y_n(b) - y_n(a) = \frac{1}{2}\int_a^b \Big(\underbrace{\tau^2}_{\leq 1} + \underbrace{y_{n-1}^2(\tau)}_{\leq 1}\Big) d\tau \leq \frac{1}{2}\int_a^b 2 d\tau = b - a$$

On applique alors le théorème de passage à la limite dans une inégalité aux suites convergentes $(y_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit

$$0 \leq y(b) - y(a) \leq b - a$$

Ce qui montre que la fonction y est lipschitzienne de rapport 1 (on dit aussi *contractante*), donc continue donc intégrable.

3. a. Comme les suites sont croissantes, on sait déjà que $0 \leq y_{n+1}(t) - y_n(t)$. On va montrer l'autre inégalité par récurrence.
Pour $n = 0$:

$$\forall t \in [0,a] : y_1(t) - y_0(t) = \frac{t^3}{6} \leq 1 = a^0$$

Montrons maintenant que l'ordre $n-1$ entraine l'ordre n :

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) - y_n(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \Big(y_n^2(\tau) - y_{n-1}^2(\tau)\Big) d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\underbrace{y_n(\tau) + y_{n-1}(\tau)}_{\leq 2}\Big)\Big(\underbrace{y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)}_{\leq a^{n-1}}\Big) d\tau \text{ car } \tau \in [0,t] \subset [0,a] \\ &\leq t a^{n-1} \leq a^n \text{ pour } t \in [0,a] \end{aligned}$$

b. Pour tous les naturels n et p, on peut considérer

$$\begin{aligned} y'_{n+p}(t) - y_n(t) &= \big(y_{n+1}(t) - y_n(t)\big) + \big(y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)\big) + \\ &\quad \cdots + \big(y_{n+p}(t) - y_{n+p-1}(t)\big) \\ &\leq a^n + a^{n+1} + \cdots + a^{n+p} = \frac{a^n(1-a^{p+1})}{1-a} \leq \frac{a^n}{1-a} \end{aligned}$$

Pour n et t fixés, appliquons le théorème de passage à la limite dans une inégalité à la suite convergente $(y_{n+p}(t))_{p\in\mathbb{N}}$. On obtient :

$$0 \leq y(t) - y_n(t) \leq \frac{a^n}{1-a}$$

c. Notons $I_n(t)$ l'expression que l'on nous demande d'encadrer. Remplaçons $y_{n+1}(t)$ par son expression intégrale. On obtient :

$$I_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(y^2(\tau) - y_n^2(\tau)\Big) d\tau \geq 0$$

car $0 \leq y_n(\tau) \leq y(\tau)$ les suites définissant y étant croissantes. D'autre part :

$$I_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\underbrace{y(\tau) + y_n(\tau)}_{\leq 2}\Big)\Big(\underbrace{y(\tau) - y_n(\tau)}_{\leq \frac{a^n}{1-a}}\Big) d\tau \leq \int_0^t \frac{a^n}{1-a} d\tau = \frac{a^n t}{1-a}$$

4. a. Pour un $t \in [0,1[$ quelconque, il existe un $a \in [0,1[$ tel que $t \in [0,a]$. On peut donc écrire l'encadrement de la question précédente :

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\int_0^t \Big(\tau^2 + y^2(\tau)\Big) d\tau\right) - y_{n+1}(t) \leq \frac{a^n t}{1-a}$$

Appliquons encore une fois le théorème de passage à la limite aux suites $(y_{n+1}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{a^n t}{1-a})_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers $y(t)$ et 0. On en déduit :

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\int_0^t \Big(\tau^2 + y^2(\tau)\Big) d\tau\right) - y(t) \leq 0 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\tau^2 + y^2(\tau)\Big) d\tau$$

b. La formule précédente est valable dans $[0,1[$. En revanche on ne peut pas l'obtenir en 1 par la méthode précédente car il n'existe pas de $a < 1$ assurant la convergence géométrique. La formule est encore valable en 1 simplement par continuité des deux fonctions.
La fonction y est continue dans $[0,1]$ car contractante. La fonction

$$t \to \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\tau^2 + y^2(\tau)\Big) d\tau$$

est elle aussi continue dans $[0,1]$ d'après les propriétés d'une intégrale fonction de sa borne supérieure. Elle est même dérivable de dérivée

$$t \to t^2 + y^2(t)$$

Comme ces fonctions coïncident dans $[0,1[$, elles prennent la même valeur en 1 et leurs dérivées aussi. La fonction y est donc solution de l'équation différentielle citée au début.

Partie II. Unicité : lemme de Gronwall

1. a. Les fonctions $|y|$ et $|z|$ sont continues, leur somme aussi. Sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et atteint ses bornes ce qui justifie l'existence de M. De plus, en utilisant les expressions intégrales de y et z, il vient :

$$y(t) - z(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(y^2(\tau) - z^2(\tau)\right) d\tau$$
$$\Rightarrow u(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\left|y(\tau) + z(\tau)\right|}_{\leq M} u(\tau)d\tau \leq \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau$$

b. Il s'agit de simples manipulations algébriques. (noter l'ajout arbitraire d'un $\varepsilon > 0$ quelconque) :

$$u(t) \leq \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau \Rightarrow u(t) \leq \varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau$$
$$\Rightarrow \frac{M}{2}u(t) \leq \frac{M}{2}\left(\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{M}{2}u(t)}{\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau} \leq \frac{M}{2}$$

2. a. On remarque que

$$t \rightarrow \frac{\frac{M}{2}u(t)}{\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau}$$

est la dérivée de

$$t \rightarrow \ln\left(\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau\right)$$

En intégrant l'inégalité du 1.b. entre 0 et t on obtient donc :

$$\ln\left(\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau\right) - \ln\varepsilon \leq \frac{M}{2}t$$

On compose alors par la fonction exponentielle ce qui donne :

$$\frac{\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau}{\varepsilon} \leq e^{\frac{M}{2}t}$$

b. On en déduit

$$\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau \leq \varepsilon e^{\frac{M}{2}t}$$

Combinée avec

$$u(t) \leq \varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau$$

Cela donne

$$u(t) \leq \varepsilon e^{\frac{M}{2}t}$$

3. Pour chaque t fixé, on a

$$\forall \varepsilon > 0 : u(t) \leq \varepsilon e^{\frac{M}{2}t}$$

Comme ε est quelconque, on en déduit (raisonnement à la Cauchy) que $u(t) \leq 0$ c'est à dire en fait $u(t) = 0$ et $y(t) = z(t)$.
On peut raisonner ainsi ***pour tous*** les t. Cela prouve l'unicité de la solution avec la condition initiale donnée.

Partie III. Approximation : méthode d'Euler

1. L'inégalité demandée découle immédiatement de la convexité de la fonction exponentielle ou de l'étude des variations de $x \rightarrow e^x - x - 1$.

2. a. Pour tout n : $E_n - e_n \geq 0$ se montre par récurrence car $E_0 - e_0 = 0$ et on déduit des relations :

$$E_{n+1} - e_{n+1} \geq A(E_n - e_n) \geq 0$$

car $A > 0$.

b. On applique la question précédente en utilisant le fait que

$$\forall n \in \mathbb{N} : E_n = \frac{B}{A-1}(A^n - 1)$$

On peut se contenter de vérifier la relation de récurrence ou bien trouver la suite vérifiant une telle relation (suite arithmético-géométrique).

3. Il s'agit en fait de majorer l'erreur commise en utilisant la méthode du rectangle pour approcher une intégrale. On adapte la méthode du cours Approximations d'une intégrale pour les trapèzes. Cela revient à une inégalité de Taylor-Lagrange. On pose

$$F(x) = \int_\alpha^x \varphi(t)dt - (x - \alpha)\varphi(\alpha)$$

Alors
$$F'(x) = \varphi(x) - \varphi(\alpha) \leq M_1(x-\alpha)$$
d'après l'inégalité des accroissements finis. On peut alors intégrer :
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt - (x-\alpha)\varphi(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta F'(x)dx$$
$$\leq \int_\alpha^\beta M_1(x-\alpha)\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}M_1$$

4. On écrit les deux accroissements à l'aide d'intégrales sur un segment de longueur h :
$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(t_i^2 + u_i^2) = u_i + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(t_i^2 + u_i^2\right)dt \\ y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(t^2 + y^2(t)\right)dt \end{cases}$$
$$\Rightarrow e_{i+1} = e_i + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(t^2 - t_i^2 + y^2(t) - u_i^2\right)dt$$

5. a. Montrons par récurrence que $e_i \geq 0$. C'est vrai à l'ordre 0 car $e_0 = 0$. Supposons $u_i \geq 0$. Alors $t^2 - t_i^2 \geq 0$ pour $t \in [t_i, t]$. Comme y est croissante (sa dérivée est positive), $y(t) \geq y(t_i) \geq u_i$ donc $y^2(t) - u_i^2 \geq 0$ et l'intégrale est positive. On en déduit que e_i est positive. En fait on a montré que la suite des e_i est croissante ce qui se voit bien sur la figure.
Si $e_i \geq 0$, on a $u_i \geq y(t_i) \geq 1$.

b. On majore l'expression intégrale de la question 4. avec l'inégalité suivante qui est une conséquence de la question 3. :
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt \leq (\beta-\alpha)\varphi(\alpha) + \frac{M_1}{2}(\beta-\alpha)^2.$$
Ici $\alpha = t_i$, $\beta = t_{i+1} = t_i + h$, $\varphi :\ t \rightarrow \frac{1}{2}\left(t^2 - t_i^2 + y^2(t) - u_i^2\right)$
$$\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(t^2 - t_i^2 + y^2(t) - u_i^2\right) \leq \frac{h}{2}(y^2(t_i) - u_i^2) + \frac{M_1}{2}h^2.$$
On peut prendre $M_1 = 2$ dans la majoration car $\varphi'(t) = t + y'(t)y(t)$ avec $t_{i+1} \leq 1$ et $y(t) \leq 1$, donc
$$y'(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + y^2(t)\right) \leq 1 \Rightarrow \varphi'(t) \leq 2.$$

Cela conduit à :
$$e_{i+1} \leq e_i + h(y(t_i)^2 - u_i^2) + h^2 \leq e_i + \frac{h}{2}\underbrace{(y(t_i) - u_i)}_{=e_i}\underbrace{(y(t_i) + u_i)}_{\leq 2} + h^2$$
$$\leq e_i + he_i + h^2 = (1+h)e_i + h^2$$

6. D'après 2. avec $A = 1+h$ et $B = h^2$:
$$e_i \leq \frac{h^2}{1+h-1}\left((1+h)^i - 1\right) \leq h\left((1+h)^N - 1\right)$$
car $i \leq N$. Or $1 + h \leq e^h$ donc $(1+h)^N \leq e^{Nh}$ avec $Nh = 1$
$$e_i \leq h(e-1)$$