Exercice

Cet exercice repose sur l'utilisation de la décomposition en éléments simples.
Montrer la convergence et calculer la limite de la suite

$$\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{4k-3}{k(k-2)(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Problème

On se propose de démontrer l'existence et l'unicité puis d'approcher numériquement une fonction y définie continue dérivable dans $[0,1]$ et vérifiant :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \forall t \in [0,1] : y'(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + y^2(t)\right) \end{cases}$$

I. Existence : méthode de Picard

Pour tout entier n, on définit une fonction polynomiale y_n par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} : y_0(t) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} : y_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\tau^2 + y_n^2(\tau)\right) d\tau \end{cases}$$

1. a. Calculer $y_1(t)$ pour tout réel t.
   b. Pour tout entier n, montrer que $y_n(0) = 0$ et que la fonction y_n est croissante.
   c. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1] : 0 \leq y_n(t) \leq 1$$
2. a. Pour tout $t \in [0,1]$, montrer que la suite $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que cette suite est convergente. On note $y(t)$ la limite de cette suite.
   Ceci définit une fonction y dans $[0,1]$. La notation y désigne cette fonction *dans toute la suite du problème.*
   b. Montrer que $y(0) = 0$ et que
   $$\forall t \in [0,1] : 0 \leq y(t) \leq 1$$
   c. Montrer que y est lipschitzienne de rapport 1 donc continue.
3. Dans cette question $0 < a < 1$.
   a. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,a] : 0 \leq y_{n+1}(t) - y_n(t) \leq a^n$$
   b. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,a] : 0 \leq y(t) - y_n(t) \leq \frac{a^n}{1-a}$$
   c. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,a] : 0 \leq \frac{1}{2}\int_0^t \left(\tau^2 + y^2(\tau)\right) d\tau - y_{n+1}(t) \leq \frac{a^n t}{1-a}$$
4. a. Montrer que
   $$\forall t \in [0,1[: y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\tau^2 + y^2(\tau)\right) d\tau$$
   b. Montrer que la formule précédente est valable aussi en 1. En déduire que y est une solution de l'équation différentielle donnée au début de l'énoncé.

II. Unicité : lemme de Gronwall

On suppose qu'il existe deux solutions y et z dans $[0,1]$ de l'équation différentielle donnée au début. On définit la fonction u par :

$$\forall t \in [0,1] : u(t) = |y(t) - z(t)|$$

On pose aussi :

$$M = \max_{[0,1]} (|y| + |z|)$$

1. a. Justifier l'existence de M. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$:
   $$u(t) \leq \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau) d\tau$$
   b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,1]$:
   $$\frac{\frac{M}{2}u(t)}{\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau} \leq \frac{M}{2}$$

2. a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,1]$:
$$\frac{\varepsilon + \frac{M}{2}\int_0^t u(\tau)d\tau}{\varepsilon} \leq e^{\frac{M}{2}t}$$

   b. En déduire (lemme de Gronwall) que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,1]$:
$$u(t) \leq \varepsilon\, e^{\frac{M}{2}t}$$

3. Montrer que $y(t) = z(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

III. Approximation : méthode d'Euler

Soit N un entier naturel fixé, on pose $h = \frac{1}{N}$ et , pour tout entier i entre 0 et N, $t_i = ih$. On définit une famille de nombres réels $u_0, u_1, \cdots, u_N$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall i \in \{0, \cdots, N-1\} : u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}(t_i^2 + u_i^2) \end{cases}$$
Pour i entre 1 et N, on considère chaque u_i comme une approximation de $y(t_i)$.
On pose $e_i = y(t_i) - u_i$ et on cherche à encadrer les e_i c'est à dire à trouver une majoration de l'erreur.

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$: $1 + x \leq e^x$.
2. Soit A et B des réels strictement positifs, de plus $A \neq 1$. On considère deux suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\begin{array}{lcl} e_0 = 0 & , & \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq e_{n+1} \leq Ae_n + B \\ E_0 = 0 & , & \forall n \in \mathbb{N} : E_{n+1} = AE_n + B \end{array}$$
   a. Montrer que $e_n \leq E_n$ pour tous les entiers n.
   b. Montrer que pour tout entier n :
$$e_n \leq \frac{B}{A-1}(A^n - 1)$$
3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$ et M_1 réel tel que $|\varphi'(t)| \leq M_1$ pour tous les $t \in [\alpha, \beta]$. Montrer que
$$\left| \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt - (\beta - \alpha)\varphi(\alpha) \right| \leq \frac{M_1}{2}(\beta - \alpha)^2$$
4. Pour tout entier i entre 0 et $N-1$, montrer que :
$$e_{i+1} = e_i + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(t^2 - t_i^2 + y^2(t) - u_i^2\right) dt$$
5. a. Pour tout entier i entre 0 et $N-1$, montrer que $0 \leq e_i$ et que $0 \leq u_i \leq 1$.
   b. Pour tout entier i entre 0 et $N-1$, montrer que :
$$e_{i+1} \leq (1+h)e_i + h^2$$
6. Pour tout entier i entre 0 et $N-1$, montrer que :
$$e_i \leq h\left((1+h)^N - 1\right)$$
   En déduire
$$0 \leq e_i \leq h(e-1)$$

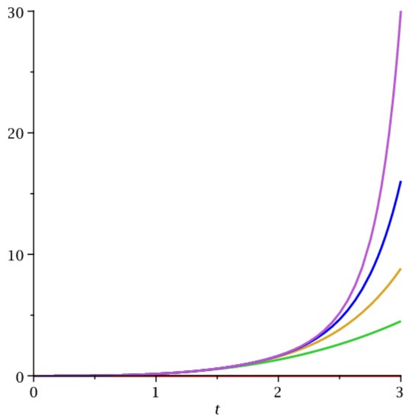

FIG. 1: Portions de graphe de y_0, y_1, y_2, y_3, y_4

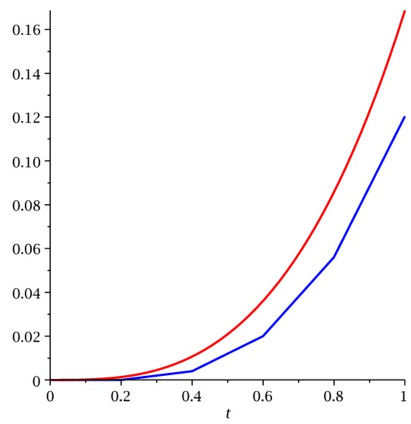

FIG. 2: Méthode d'Euler pour $N = 5$.