Exercice 1.

Partie I

1. On va montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{T}^+$: A^3 est la matrice nulle.
En effet
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. a. Soit D une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont α, β, γ et commutant avec toutes les triangulaires supérieures strictes.
$$D \text{ commute avec } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta$$
$$D \text{ commute avec } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \gamma$$
On doit donc avoir $\alpha = \beta = \gamma$ soit $D \in \operatorname{Vect}(I_3)$. Réciproquement, toute matrice de la forme λI_3 commute avec toute autre matrice.

   b. Comme D commute avec A, on peut utiliser la formule du binôme. Cette formule est très simple car les puissances de A sont nulles à partir de l'exposant 3. On obtient :
$$(D + A)^n = D^n + nD^{n-1}A + \frac{n(n-1)}{2}D^{n-2}A^2$$

Partie II

1. Il est bien évident par définition que $\mathcal{E}$ est non vide, pour montrer que c'est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$, on doit vérifier que :
– toute matrice de $\mathcal{E}$ est inversible et que son inverse est encore dans $\mathcal{E}$.
– le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{E}$.
Une matrice de $\mathcal{E}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Son rang est donc 3 ce qui prouve son inversibilité. On ne cherche pas à montrer tout de suite que la matrice inverse est dans $\mathcal{E}$. Cela sera rendu plus facile par la stabilité suivante.
On vérifie facilement que
$$M(a, b)M(a', b') = M(a + a', b + b' + aa')$$
On en déduit la stabilité pour le produit.
On remarque que $I_3 = M(0, 0)$. On en déduit que $M(-a, -b + a^2) = M(a, b)^{-1}$. Ce qui prouve la stabilité par inversion qui manquait.

2. a. Appliquons la relation de définition avec x quelconque et $y = 0$. On obtient
$$\widehat{M}(x)\widehat{M}(0) = \widehat{M}(x)$$
Comme $\widehat{M}(x)$ est inversible, cela entraine $\widehat{M}(0) = I_3$ donc $f(0) = 0$. Si on applique ensuite la relation fondamentale à x et $-x$ (dans les deux sens), on obtient
$$\widehat{M}(x)^{-1} = \widehat{M}(-x)$$

   b. On peut réécrire avec des f l'expression du produit trouvée en 1.
$$M(x, f(x))M(y, f(y)) = M(x + y, f(x) + f(y) + xy)$$
On en déduit :
$$\widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x + y) \Leftrightarrow f(x) + f(y) + xy = f(x + y)$$

   c. La vérification est immédiate par le calcul.

   d. Pour $y \neq 0$ et x quelconque, en utilisant $f(0) = 0$, on peut écrire la relation fonctionnelle sous la forme suivante :
$$\frac{f(x+y)f(x)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y} + x$$
Si on suppose f dérivable dans $\mathbb{R}$, en prenant la limite en 0 des fonctions de y, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = f'(0) + x$$
Posons $m = f'(0)$, en intégrant on retrouve bien que f est de la forme
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx$$
La constante d'intégration est nulle car on doit avoir $f(0) = 0$.

Exercice 2.

Partie I.

1. La substitution de X par un polynôme de degré 1 ne change pas le degré. La fonction est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Les propriétés de la substitution entrainent la linéarité.
2. Les propriétés de la substitution entrainent la linéarité.
3. Pour former la matrice, on calcule les images des trois vecteurs de base.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(X) &= \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{2X+1}{4} \\ f(X^2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{(X+1)^2}{4}\right) = \frac{2X^2+2X+1}{8} \end{aligned}$$

On en déduit la matrice demandée :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure avec des réels non nuls sur la diagonale, elle est donc de rang 3 ce qui prouve que f est un automorphisme.
5. Le noyau $\ker\varphi$ est formé par les polynômes de degré inférieur à 2 et admettant 1 comme racine c'est à dire divisibles par $X-1$ soit

$$\ker\varphi = (X-1)\mathbb{R}_1[X], \qquad \text{base : } (X-1, X^2-X)$$

On en déduit $\dim(\ker\varphi) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$. On peut remarquer que $\ker\varphi$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$ (noyau d'une forme linéaire non nulle).

6. L'application φ est une forme linéaire donc elle n'est pas injective car son noyau est un hyperplan (un « gros » sous-espace) mais elle est surjective car elle n'est pas nulle et à valeurs dans le corps de base.

Partie II.

1. La base canonique de $\mathbb{R}$ est la famille (1) à un seul élément. Dans cette base, un nombre réel x considéré comme un vecteur s'écrit $x = x\,1$, son unique coordonnée est donc x.

La matrice d'une forme linéaire φ est donc la ligne des images par φ des vecteurs de base. On en déduit

$$L = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a. Notons $P_0 = 1$, $P_1 = -2X+1$, $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$ de sorte que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$. Cette famille étant échelonnée, elle est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. C'est donc une base car $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3.

   b. Par définition d'une matrice de passage,

$$Q = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   c. Comme toute matrice de passage entre deux bases, Q est inversible. Pour calculer son inverse, on exprime la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= -2X+1 \\ P_2 &= 6X^2 - 6X + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 1 &= P_0 \\ X &= \frac{1}{2}P_0 - \frac{1}{2}P_1 \\ X^2 &= \frac{1}{6}P_2 - \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_0 \end{aligned}\right. \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

3. a. Les calculs de I.3. montrent que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$. D'après la formule de changement de base, $D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} f = Q^{-1}AQ$ avec

$$Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   b. On en déduit $A = QDQ^{-1}$ ce qui entraine $A^n = QD^nQ^{-1}$ après simplification des $Q^{-1}Q$ intermédiaires.

   c. En fait, on cherche la matrice de $\varphi \circ f^n$. La composition des applications linéaires se traduit par une multiplication matricielle lorsque les bases correspondent. La matrice cherchée est

$$L\,Q\,D^n\,Q^{-1}$$

Il s'agit d'une matrice ligne.

4. Considérons un $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et exprimons matriciellement une valeur de la suite

$$\varphi(f^n(P)) = L\,Q\,D^n\,Q^{-1}\,C \qquad \text{avec } C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-2n} \end{pmatrix}$$

La suite étudiée s'exprime comme une combinaison linéaire d'une suite constante et de deux suites géométriques qui convergent vers 0. Elle est donc convergente. Calculer la limite, revient à remplacer par 0 les suites qui tendent vers 0 dans D^n ce qui rend très simples les calculs matriciels.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $(\varphi(f^n(P)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \int_0^1 \widetilde{P}(t)\,dt.$$

Partie III.

1. Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition à démontrer.

$$\mathcal{P}_n : \qquad \left(\forall p \in \mathbb{R}_2[X],\ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \widehat{P}(\frac{X+k}{2^n}) \right)$$

et montrons par récurrence que les propositions $\mathcal{P}_n$ sont vraies pour $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, il s'agit de la définition même de f.
Montrons que $\mathcal{P}_n$ entraine $\mathcal{P}_{n+1}$. Pour $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, introduisons des notations polynomiales

$$Q_k = \widehat{P}(\frac{X+k}{2^n}) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{Q_k}(\frac{X}{2}) = \widehat{P}(\frac{X+2k}{2^{n+1}}) \\ \widehat{Q_k}(\frac{X+1}{2}) = \widehat{P}(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}) \end{cases}$$

En sommant sur les $k < 2^n$, on obtient, avec les $2k$ et $2k+1$ tous les $k' < 2^{n+1}$. Par linéarité,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(Q_k) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\widehat{P}(\frac{X+2k}{2^{n+1}}) + \widehat{P}(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}) \right) \\ = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k'=0}^{2^{n+1}-1} \widehat{P}(\frac{X+k'}{2^{n+1}}) \end{aligned}$$

en regroupant dans la même somme les termes pairs $2k$ et le termes impairs $2k+1$.

2. D'après la formule précédente, $\varphi(f^n(P))$ s'exprime comme une somme de Riemann (vers la droite) :

$$\varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \widetilde{P}(\frac{k+1}{2^n})$$

attachée à la subdivision régulière de pas 2^{-n}. La suite des sommes de Riemann converge vers l'intégrale car la fonction polynomiale est continue.
Dans ce raisonnement, c'est la continuité qui joue le rôle important. La limite vers l'intégrale sera donc valable pour des polynômes de n'importe quel degré.