Exercice 1

On définit des ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{D}$ de matrices carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathcal{T}$ est formé par les matrices *triangulaires supérieures*

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \beta & c \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad a,b,c,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$$

L'ensemble $\mathcal{T}^+$ est formé par les matrices *triangulaires supérieures strictes*

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est formé par les matrices *diagonales*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$$

Partie I

1. Montrer l'existence d'entiers n tels que :

$$\forall A \in \mathcal{T}^+ : A^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Préciser le plus petit de ces entiers.

2. a. Déterminer les matrices diagonales D qui commutent avec toutes les matrices triangulaires supérieures strictes.
   b. Pour une telle matrice D, calculer pour n entier et $A \in \mathcal{T}^+$

$$(D+A)^n$$

Partie II

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a,b \in \mathbb{R}$$

Pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note

$$\widehat{M}(x) = M(x, f(x))$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
2. On cherche les fonctions f telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x+y) \tag{1}$$

   a. Montrer que si f est une telle fonction : $f(0) = 0$, $\widehat{M}(0) = I_3$ et pour tout réel x

$$\widehat{M}^{-1}(x) = \widehat{M}(-x)$$

   b. Caractériser les fonctions vérifiant (1) par une relation fonctionnelle.
   c. Vérifier que, pour tout réel m,

$$x \to \frac{1}{2}x^2 + mx$$

   vérifie la condition (1)
   d. Montrer que toute fonction dérivable vérifiant (1) est de cette forme.

Exercice 2

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 noté $\mathbb{R}_2[X]$. Lorsque P et Q sont deux polynômes et a un réel, le polynôme $\widehat{P}(Q)$ est obtenu en substituant Q à X dans l'expression de P. Le réel $\widetilde{P}(a)$ est obtenu en substituant a à X dans l'expression de P.
On définit[1] les deux applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \to \frac{1}{2}\left[\widehat{P}(\frac{X}{2}) + \widehat{P}(\frac{X+1}{2})\right] \end{cases} \qquad \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ P \to \widetilde{P}(1) \end{cases}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

[1] d'après Épreuve toute filière du concours commun 2009 des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Partie I.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. L'application f est elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\ker \varphi$. Quelle est la dimension de $\ker \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Partie II

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}' = \left(1, -2X+1, 6X^2-6X+1\right)$$

1. Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}$. On notera L cette matrice.
2. a. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   c. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
3. a. Écrire la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de puissances de Q et D.
   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}$, la matrice de l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$P \mapsto \varphi(f^n(P))$$
   en fonction de L et de puissances de Q et D.
4. Montrer que
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : \ (\varphi(f^n(P)))_{n\in\mathbb{N}} \to \int_0^1 \widetilde{P}(t)dt$$

Partie III

1. Montrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N} : f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \widehat{P}(\frac{X+k}{2^n})$$
2. En déduire une deuxième démonstration (indépendante de celle de la partie II) de
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : (\varphi(f^n(P)))_{n\in\mathbb{N}} \to \int_0^1 \widetilde{P}(t)dt$$
Ce résultat est-il toujours valable sans restriction sur le degré ?

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et T un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n.
Lorsque P et Q sont deux polynômes et a un réel, le polynôme $\widehat{P}(Q)$ est obtenu en substituant Q à X dans l'expression de P.
On définit[2] une application f de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P \to Q + XR$$

où Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division de $\widehat{P}(X^2)$ par T. C'est à dire
$$\widehat{P}(X^2) = TQ + R \text{ avec } \deg R < n$$
On notera f_n la restriction de f à l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n noté ici $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie I.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que f_n est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$. On notera encore f_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ associé.
3. Dans cette question uniquement, $n = 2$ et $T = X^2$.
   a. Donner la matrice A de f_2 dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

[2] d'après Concours commun sup des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai 2009 , épreuve spécifique

b. Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

4. Dans cette question seulement, $n = 2$ et $T = (X - 1 - i)(X + i)$. Calculer l'image du polynôme $X^2 + (1 - 2i)X - 2i$ par l'application f.

Partie II.

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et

$$T = X^3 + X^2 + a$$

1. Montrer que la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ de f_3 est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

2. Discuter selon a du rang de f_3.
3. Dans cette question, $a = -1$.
   a. Donner une base de $\ker f_3$.
   b. Donner une base de $\operatorname{Im} f_3$.
   c. Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

Partie III.

1. Soit P un polynôme non nul de degré p tel que $2p < n$. Montrer que P n'est pas dans le noyau de f.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P \in \ker f$ si est seulement si il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à n tel que

$$\widehat{P}(X^2) = (1 - XT)R$$

3. Montrer que $\ker f \subset \mathbb{C}_n[X]$.
4. Montrer que, pour tout $P \in \ker f$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\deg(P) + k \leq n \Rightarrow X^k P \in \ker f$$

5. On suppose dans cette question que $\ker f$ n'est pas réduit au polynôme nul. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels défini par :

$$k \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } P \in \ker f \text{ et } \deg p = k$$

   a. Montrer que $\mathcal{I}$ possède un plus petit élément. Il sera noté d.
   b. Soit P_0 et P_1 des polynômes de degré d dans le noyau. Montrer qu'il existe un nombre complexe c tel que $P_1 = cP_0$.
   c. Montrer qu'un polynôme P est dans le noyau de f si et seulement si il existe un polynôme S de degré inférieur ou égal à $n - d$ tel que $P = SP_0$.
6. Dans cette question, on suppose $T = X^3 + X^2 - 1$. Préciser le noyau de f.