Partie I. Condition d'alignement.

1. Notons *truc* le produit des quatres vecteurs. Rappelons la formule du double produit vectoriel :
$$(u \wedge v) \wedge w = (u/w)v - (v/w)u$$
On peut l'utiliser de deux manières pour *truc* en faisant jouer à $a_2 \wedge b_1$ ou à $a_1 \wedge b_2$ le rôle de w.
$$\left.\begin{aligned} truc =&(a_1 \wedge b_2) \wedge w \in \operatorname{Vect}(a_1, b_2) \\ truc =&(b_1 \wedge a_2) \wedge w \in \operatorname{Vect}(a_2, b_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow truc \in \operatorname{Vect}(a_1, b_2) \cap \operatorname{Vect}(a_2, b_1)$$
Les droites (a_1b_2) et (a_2b_1) sont respectivement les intersections de $\mathcal{P}$ avec les plans $\operatorname{Vect}(a_1, b_2)$ et $\operatorname{Vect}(a_2, b_1)$. On en tire la relation demandée.
2. Les trois points d'intersection sont alignés si et seulement si ils sont dans une même droite. cela se produit si et seulement si les trois vecteurs sont dans un même plan ce qui se traduit par la nullité du déterminant.
3. Les points c_i de la figure **??** sont d'après la question 1 les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les droites vectorielles engendrées par les triples produits vectoriels. D'après la question 2, ces points sont alignés si et seulement si leur déterminant est nul.

Partie II. Condition de « coconicité ».

1. Par définition :
$$s(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$
Les coordonnées de $s(u)$ dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ se lisent directement :
$$(x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2)$$
2. Les points u_i sont sur une même conique si et seulement si il existe des réels $A, \cdots F$ non tous nuls tels que
$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cx_1 + Dy_1^2 + Ey_1 + F = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cx_2 + Dy_2^2 + Ey_2 + F = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cx_3 + Dy_3^2 + Ey_3 + F = 0 \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cx_4 + Dy_4^2 + Ey_4 + F = 0 \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cx_5 + Dy_5^2 + Ey_5 + F = 0 \\ Ax_6^2 + Bx_6y_6 + Cx_6 + Dy_6^2 + Ey_6 + F = 0 \end{cases}$$
Cela se produit si et seulement si le système linéaire d'équations aux inconnues (A, B, C, D, E, F) admet une solution autre que $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$. C'est à dire lorsque la matrice de ce système n'est pas inversible. Or cette matrice est la transposée de la matrice des coordonnées de la famille $(s(u_1), \cdots, s(u_6))$. La condition de non inversibilité est donc la nullité du déterminant :
$$\mu(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = 0$$

Partie III. Démonstration par « force brute ».

Le code suivant permet de réaliser en Maple le calcul des deux déterminants. Il utilise la bibliothèque `LinearAlgebra`.

```
> with(LinearAlgebra):
  a1:=<x1,y1,z1>:
  a2:=<x2,y2,z2>:
  a3:=<x3,y3,z3>:
  b1:=<u1,v1,w1>:
  b2:=<u2,v2,w2>:
  b3:=<u3,v3,w3>:

  C3:=CrossProduct(CrossProduct(a1,b2),CrossProduct(a2,b1)):
  C1:=CrossProduct(CrossProduct(a2,b3),CrossProduct(a3,b2)):
  C2:=CrossProduct(CrossProduct(a3,b1),CrossProduct(a1,b3)):

  #calcul du lambda
  dd:=Determinant(<C1|C2|C3>):

  lign:= V -><V[1]^2|V[1]*V[2]|V[1]*V[3]|V[2]^2|V[2]*V[3]|V[3]^2>:

  #calcul du mu
  DD:=Determinant(<lign(a1),lign(a2),lign(a3),lign(b1),lign(b2),lign(b3)>):

  dd-DD;
```

Les expressions des déterminants sont trop importantes pour que leur affichage apporte quelque chose. La dernière instruction seulement affiche un résultat et celui ci est 0.
Une implémentation en Python (utilisant le module de calcul formel `sympy` est aussi proposée.

```
import sympy as smp

## déclaration des symboles
x1, y1, z1 = smp.symbols('x1 y1 z1')
x2, y2, z2 = smp.symbols('x2 y2 z2')
x3, y3, z3 = smp.symbols('x3 y3 z3')

u1, v1, w1 = smp.symbols('u1 v1 w1')
u2, v2, w2 = smp.symbols('u2 v2 w2')
u3, v3, w3 = smp.symbols('u3 v3 w3')

## initialisation
a1 = smp.Matrix([x1, y1, z1])
a2 = smp.Matrix([x2, y2, z2])
a3 = smp.Matrix([x3, y3, z3])

b1 = smp.Matrix([u1, v1, w1])
b2 = smp.Matrix([u2, v2, w2])
b3 = smp.Matrix([u3, v3, w3])

## produits vectoriels
X12 = a1.cross(b2) ; X13 = a1.cross(b3)
X21 = a2.cross(b1) ; X23 = a2.cross(b3)
X31 = a3.cross(b1) ; X32 = a3.cross(b2)

C1 = X23.cross(X32)
C2 = X31.cross(X13)
C3 = X12.cross(X21)

## calcul du lambda
C = C1.col_insert(1,C2)
C = C.col_insert(2,C3)
dlambda = C.det()

## calcul du mu
def li(L):
    return [L[0]**2, L[0]*L[1],L[0]*L[2],L[1]**2,L[1]*L[2], L[2]**2]
M = smp.Matrix([li(a1),li(a2),li(a3),li(b1),li(b2),li(b3)])
mu = M.det()

## vérification
print(dlambda - mu)
```

De l'égalité des deux déterminants, on déduit évidemment que la nullité de l'un est équivalente à la nullité de l'autre. Ceci démontre le théorème de l'hexagramme de Pascal.

> Les trois points c_1, c_2, c_3 de la configuration de la figure **??** sont alignés si et seulement si les six points donnés sont situés sur une même conique.

Partie IV. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

1. a. La fonction c_M est bien à valeurs dans $\mathcal{S}$. En effet,

$$\forall S \in \mathcal{S} : {}^t(MS\,{}^tM) = {}^t({}^tM)\,{}^tS\,{}^tM = MS\,{}^tM$$

car S est symétrique. De plus c_M est linéaire à cause de la linéarité du produit matriciel.

b. Soit M et M' deux matrices 3×3. Pour toute S symétrique :

$$c_{M'} \circ c_M(S) = c_{M'}(MS\,{}^tM) = M'MS\,{}^tM\,{}^tM' = (M'M)S\,{}^t(M'M)$$

On en déduit $c_{M'} \circ c_M = c_{M'M}$.

c. Il est évident que c_I est l'identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On en déduit que, lorsque M est inversible, c_M est bijective de bijection réciproque $c_{M^{-1}}$.
Montrons maintenant la contraposée de la réciproque. Supposons M non inversible. Il existe une colonne X non nulle telle que MX est la colonne nulle. En répétant la colonne X, on peut former une matrice M' telle que MM' est la matrice nulle. On en déduit que $c_M \circ c_{M'}$ est l'application identiquement nulle de $\mathcal{S}$ dans lui même. Cette application n'est évidemment pas surjective ce qui montre que c_M n'est pas bijective. Ceci montre bien que c_M bijective entraine M inversible.

2. a. On reconnait une matrice d'opération élémentaire.
   - $A\,{}^tM$ est obtenue à partir de A en permutant les colonnes 1 et 2.
   - MA est obtenue à partir de A en permutant les lignes 1 et 2.

b. La matrice $c_M(S)$ est obtenue par les opérations élémentaires décrites en a. (on commence par les colonnes)

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & a & c \\ d & b & e \\ e & c & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & b & e \\ b & a & c \\ e & c & f \end{pmatrix} = c_M(S)$$

c. Le calcul précédent permet d'écrire la matrice de c_M dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est obtenue à partir de I_6 en permutant les colonnes 1 et 4 puis 3 et 5. Son déterminant est donc 1.

$$\det C_{P_{1,2}} = 1$$

3. a. On reconnait une matrice d'opération élémentaire.
   - $A\,^tM$ est obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la colonne 2 à la colonne 1.
   - MA est obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la ligne 2 à la ligne 1.

   b. La matrice $c_M(S)$ est obtenue par les opérations élémentaires décrites en a. (on commence par les colonnes)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+\lambda b & b & c \\ b+\lambda d & d & e \\ c+\lambda e & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+2\lambda b+\lambda^2 d & b+\lambda d & c+\lambda e \\ b+\lambda d & d & e \\ c+\lambda e & e & f \end{pmatrix}$$

   c. Le calcul précédent permet d'écrire la matrice de c_M dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, son déterminant est donc 1.

$$\det C_{A_{1,2}(\lambda)} = 1$$

4. a. On reconnait une matrice d'opération élémentaire.
   - $A\,^tM$ est obtenue à partir de A en multipliant par λ la colonne 1.
   - MA est obtenue à partir de A en multipliant par λ la ligne 1.

   b. La matrice $c_M(S)$ est obtenue par les opérations élémentaires décrites en a. (on commence par les colonnes)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a & b & c \\ \lambda b & d & e \\ \lambda c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda b & d & e \\ \lambda c & e & f \end{pmatrix}$$

   c. Le calcul précédent permet d'écrire la matrice de c_M dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est diagonale avec λ^2, λ, λ sur la diagonale, son déterminant est donc λ^4.

$$\det C_{D_1(\lambda)} = \lambda^4$$

5. Remarquons d'abord que la formule proposée par l'énoncé est valable pour les *matrices élémentaires* des questions précédentes.
   Soit M une matrice inversible fixée. En utilisant l'algorithme du pivot partiel, on peut trouver des matrices $M_1, \cdots M_s$ élémentaires de la forme $P_{i,j}$ ou $A_{i,j}(\lambda)$ avec $j > i$ telles que

$$M_s \cdots M_1 M = U : \text{matrice triangulaire supérieure}$$

   si on s'autorise maintenant les $A_{i,j}(\lambda)$ avec $i > j$ on peut trouver de nouvelles matrices élémentaires $M_{s+1}, \cdots, M_t$ permettant de « nettoyer » la partie supérieure de la matrice.

$$M_t \cdots M_1 M = D : \text{matrice diagonale}$$

   Les termes de la diagonale sont non nuls, cette matrice diagonale est clairement un produit de trois matrices $D_i(\lambda)$. Les matrices élémentaires considérées sont inversibles avec des inverses de même forme :

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j} \qquad A_{i,j}(\lambda)^{-1} = A_{i,j}(-\lambda) \qquad D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$$

La matrice M est donc le produit de matrices élémentaires $P_1, \cdots, P_q$.

$$\begin{aligned} M = P_1 \cdots P_q \Rightarrow c_M &= c_{P_1} \circ \cdots \circ c_{P_q} \\ \Rightarrow \det c_M &= \det c_{P_1} \cdots \det c_{P_q} = (\det P_1)^4 \cdots (\det P_q)^4 \\ &= (\det(P_1 \cdots P_q))^4 = (\det M)^4 \end{aligned}$$

Partie V. Adjoint et image d'un produit vectoriel.

1. Question de cours
   a. Le terme i, j de la matrice de f dans une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) est $(u_i / f(u_j))$.
   b. Par définition du déterminant d'une application linéaire :
   $$\forall (a,b,c) \in E^3 : \det_{\mathcal{U}}(g(a), g(b), g(c)) = \det g \, \det_{\mathcal{U}}(a,b,c)$$
2. a. Soit $\mathcal{U}$ une base orthonormée quelconque. La matrice de passage P de $\mathcal{B}_E$ dans $\mathcal{U}$ est alors orthogonale. Écrivons les formules de changement de base :
   $$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathcal{U}}({}^t f) &= P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}({}^t f) P = {}^t P \, {}^t \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P \text{ (car } P \text{ est orthogonale)} \\ &= {}^t \big({}^t P \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P \big) = {}^t \big(P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P \big) \text{ (car } P \text{ est orthogonale)} \\ &= {}^t (\operatorname{Mat}_{\mathcal{U}}(f)) \end{aligned}$$
   b. La relation que l'énoncé demande de vérifier est la définition même de ${}^t f$ lorsque x et y sont deux vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$. On étend cette formule à tous les vecteurs par linéarité.
   c. Pour une matrice carrée, comme le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée, l'inversibilité d'une matrice est équivalente à celle de sa transposée. De plus :
   $$AA^{-1} = A^{-1}A = I \Rightarrow {}^t A^{-1} \, {}^t A = {}^t A \, {}^t A^{-1} = I$$
   Ce qui montre que l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.
3. On utilise la définition du produit vectoriel avec le déterminant dans une base orthonormée quelconque (produit mixte). Pour tout vecteur $c \in E$:
   $$\begin{aligned} (f(a) \wedge f(b) / c) &= \det(f(a), f(b), c) = \det(f(a), f(b), f(f^{-1}(c))) \\ &= (\det f) \det(a, b, f^{-1}(c)) = (\det f)(a \wedge b / f^{-1}(c)) = (\det f)({}^t f^{-1}(a) \wedge b / c) \end{aligned}$$
   Comme ceci est valable pour *tous* les c, on obtient bien :
   $$f(a) \wedge f(b) = (\det f) \, {}^t f^{-1}$$
4. Dans le cours figure une expression de l'inverse d'une matrice à l'aide de la transposée de la matrice des cofacteurs. On en déduit que, si A est la matrice de f dans une base orthonormée, la matrice de $(\det f) \, {}^t f^{-1}$ est la matrice des cofacteurs de A.

Partie VI. Démonstration classique.

1. Comme l'énoncé nous y invite, on développe chaque déterminant suivant la première colonne.
   $$\begin{vmatrix} w_2u_1 & u_3u_2 & u_1v_3 \\ v_2w_1 & u_3v_2 & v_1v_3 \\ w_2w_1 & w_3u_2 & v_1w_3 \end{vmatrix} = \underset{\blacktriangle}{w_2u_1u_3v_2v_1w_3} - \underset{\blacktriangledown}{w_2u_1w_3u_2v_1v_3} - \underset{\blacklozenge}{v_2w_1u_3u_2v_1w_3} + \underset{\bigstar}{v_2w_1w_3u_2u_1v_3} + \underset{\spadesuit}{w_2w_1u_3u_2v_1v_3} - \underset{\clubsuit}{w_2w_1u_3v_2u_1v_3}$$
   $$\begin{vmatrix} u_1v_1 & u_2v_2 & u_3v_3 \\ v_1w_1 & v_2w_2 & v_3w_3 \\ u_1w_1 & u_2w_2 & u_3w_3 \end{vmatrix} = \underset{\blacktriangle}{u_1v_1v_2w_2u_3w_3} - \underset{\blacktriangledown}{u_1v_1u_2w_2v_3w_3} - \underset{\blacklozenge}{v_1w_1u_2v_2u_3w_3} + \underset{\spadesuit}{v_1w_1u_2w_2u_3v_3} + \underset{\bigstar}{u_1w_1u_2v_2v_3w_3} - \underset{\clubsuit}{u_1w_1v_2w_2u_3v_3}$$
   On en déduit l'égalité.
2. Le λ des $f(u_i)$ est un déterminant de trois vecteurs. Examinons le premier :
   $$truc_1 = (f(a_1) \wedge f(b_2)) \wedge (f(a_2) \wedge f(b_1))$$
   Notons $g = {}^t f^{-1}$ et appliquons plusieurs fois la question V.3 et la linéarité :
   $$\left.\begin{aligned} f(a_1) \wedge f(b_2) &= (\det f) g(a_1 \wedge b_2) \\ f(a_2) \wedge f(b_1) &= (\det f) g(a_2 \wedge b_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow truc_1 = (\det f)^2 g(a_1 \wedge b_2) \wedge g(a_2 \wedge b_1)$$
   $$= (\det f)^2 (\det g) \, {}^t g^{-1} \left((a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1) \right) = (\det f) f \left(\underbrace{(a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1)}_{=c_1} \right)$$
   $$\text{car } \det g = \frac{1}{\det f} \text{ et } {}^t g^{-1} = f$$

On obtient des formules analogues pour les autres vecteurs. Par trilinéarité et définition du déterminant d'un endomorphisme, il vient enfin :

$$\begin{aligned}\lambda\left(f(a_1),f(a_2),f(a_3),f(b_1),f(b_2),f(b_3)\right) &= (\det f)^3 \det_{\mathcal{B}_E}(f(c_1),f(c_2),f(c_3))\\ &= (\det f)^4 \det_{\mathcal{B}_E}(c_1,c_2,c_3) = (\det f)^4 \lambda\left(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\right)\end{aligned}$$

3. Soit f un automorphisme de matrice M dans $\mathcal{B}_E$. Soit u un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées est notée X. Examinons $s(f(u)$.

$$s(f(u)) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f(u))\,{}^t\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f(u)) = (AX)\,{}^t(AX) = AX\,{}^tX\,{}^tA = c_A(s(u))$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}&\lambda\left(f(a_1),f(a_2),f(a_3),f(b_1),f(b_2),f(b_3)\right)\\ &\quad= \det_{\mathcal{B}_S}\left(c_A(s(a_1)),c_A(s(a_2)),c_A(s(a_3)),c_A(s(b_1)),c_A(s(b_2)),c_A(s(b_3))\right)\\ &\quad= \det c_A \det_{\mathcal{B}_S}\left(s(a_1),s(a_2),s(a_3),s(b_1),s(b_2),s(b_3)\right)\\ &\quad= (\det A)^4 \lambda\left(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\right)\end{aligned}$$

4. a. On calcule les coordonnées des produits vectoriels dans la base $\mathcal{B} = (i,j,k)$. On trouve :

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(i\wedge b_2) &= \begin{pmatrix}0\\-w_2\\v_2\end{pmatrix}\\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(j\wedge b_1) &= \begin{pmatrix}w_1\\0\\-u_1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left((i\wedge b_2)\wedge(j\wedge b_1)\right) = \begin{pmatrix}w_2u_1\\v_2w_1\\w_2w_1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(j\wedge b_3) &= \begin{pmatrix}w_3\\0\\-u_3\end{pmatrix}\\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(k\wedge b_2) &= \begin{pmatrix}-v_2\\u_2\\0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left((j\wedge b_3)\wedge(k\wedge b_2)\right) = \begin{pmatrix}u_3u_2\\u_3v_2\\w_3u_2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(k\wedge b_1) &= \begin{pmatrix}-v_1\\u_1\\0\end{pmatrix}\\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(i\wedge b_3) &= \begin{pmatrix}0\\-w_3\\v_3\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left((k\wedge b_1)\wedge(i\wedge b_3)\right) = \begin{pmatrix}u_1v_3\\v_1v_3\\v_1w_3\end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\lambda(i,j,k,b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix}w_2u_1 & u_3u_2 & u_1v_3\\ v_2w_1 & u_3v_2 & v_1v_3\\ w_2w_1 & w_3u_2 & v_1w_3\end{vmatrix}$$

b. Par définition de μ :

$$\mu(i,j,k,b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix}1&0&0&u_1^2&u_2^2&u_3^2\\0&0&0&u_1v_1&u_2v_2&u_3v_3\\0&0&0&u_1w_1&u_2w_2&u_3w_3\\0&1&0&v_1^2&v_2^2&v_3^2\\0&0&0&v_1w_1&v_2w_2&v_3w_3\\0&0&1&w_1^2&w_2^2&w_3^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0&u_1^2&u_2^2&u_3^2\\0&1&0&v_1^2&v_2^2&v_3^2\\0&0&1&w_1^2&w_2^2&w_3^2\\0&0&0&u_1v_1&u_2v_2&u_3v_3\\0&0&0&v_1w_1&v_2w_2&v_3w_3\\0&0&0&u_1w_1&u_2w_2&u_3w_3\end{vmatrix}$$

en permutant les lignes 2 et 4 puis 3 et 6. On en déduit :

$$\mu(i,j,k,b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix}u_1v_1 & u_2v_2 & u_3v_3\\ v_1w_1 & v_2w_2 & v_3w_3\\ u_1w_1 & u_2w_2 & u_3w_3\end{vmatrix}$$

On en déduit, d'après la question 1. que ces deux déterminants sont égaux.

5. Considérons six vecteurs $a_1,\cdots,a_6$ dont les trois premiers forment une famille libre. Il existe un unique automorphisme f qui envoie respectivement a_1, a_2, a_3 sur i, j, k. Notons b_1, b_2, b_3 les images par f des vecteurs suivants et M la matrice de f dans $\mathcal{B}_E$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\lambda(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) &= (\det f)^{-4}\lambda(i,j,k,b_1,b_2,b_3)\\ &= (\det M)^{-4}\mu(i,j,k,b_1,b_2,b_3) = \mu(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\end{aligned}$$

6. a. La bilinéarité est évidente, la symétrie vient du caractère symétrique des matrices et de l'invariance de la trace par transposition. La positivité vient de ce que $< S/S >$ est la somme des carrés des termes de S.

b. Notons respectivement X et Y les colonnes de coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}_E$. Par définition :

$$< s(x)/s(y) >= \operatorname{tr}\left(X \underbrace{{}^t\!XY}_{\in\mathbb{R}} {}^t Y \right) = ({}^t\!XY)\operatorname{tr}(X\,{}^tY) = ({}^t\!XY)^2 = (x/y)^2$$

après examen de la matrice $X\,{}^tY$.

c. En calculant les $< S_i/S_j >$, on vérifie facilement que la base $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ est orthogonale. Elle n'est pas orthonormée car S_1, S_4 et S_6 sont de norme 1 mais les autres sont de norme 2.

d. Considérons six vecteurs $a_1, \cdots, a_6$ de E et notons P la matrice dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ des images de ces vecteurs par S. D'après b. :

$$< s(a_i)/s(a_j) >= (a_i/a_j)^2$$

mais c'est aussi le terme i, j de la matrice

$${}^tPDP$$

où D est la matrice du produit scalaire $< ./. >$ dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. Cette matrice est diagonale avec trois 1 et trois 2. L'égalité des déterminants obtenue à partir de cette égalité matricielle conduit à la relation demandée.