L'objet de ce problème est la démonstration du théorème de l'hexagramme de Pascal (fig 3). Les parties I, II, IV, V sont indépendantes entre elles.

Notations communes à tout le problème.

On désigne par E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le produit scalaire est noté $(./.)$, une base orthonormée $\mathcal{B}_E = (i, j, k)$ est fixée.
Le plan affine $\mathcal{P}$ dans E est défini par $k + \operatorname{Vect}(i, j)$ (fig. 1).

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques 3×3. En particulier, on note :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilisera (la démonstration n'est pas demandée) le fait que

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$$

est une base de $\mathcal{S}$.

On définit une application s de la manière suivante :

$$s : \begin{cases} E \rightarrow \mathcal{S} \\ x \mapsto (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E} x)\ {}^t(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E} x) \end{cases}$$

On sera amené à considérer les déterminants $\det_{\mathcal{B}_E}$ et $\det_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$. On prendra bien garde aux espaces de départ :

$$\det_{\mathcal{B}_E} \text{ est défini dans } E^3. \qquad \det_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} \text{ est défini dans } \mathcal{S}^6$$

Des fonctions λ et μ, définies dans E^6, sont introduites dans les parties I et II et utilisées ensuite.

Partie I. Condition d'alignement.

1. On se donne quatre vecteurs a_1, a_2, b_1, b_2 dans $\mathcal{P}$ (fig. 1). Montrer que

$$\mathcal{P} \cap \operatorname{Vect}\left((a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1)\right) = (a_1 b_2) \cap (a_2 b_1)$$

où $(a_1 b_2)$ et $(a_2 b_1)$ désignent les droites dans le plan $\mathcal{P}$.

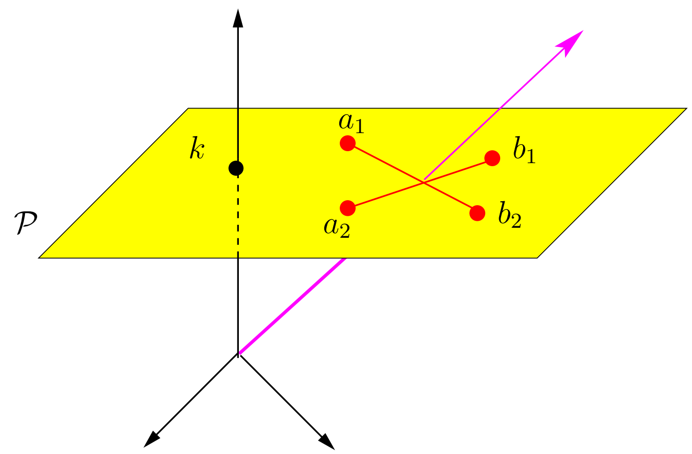

FIG. 1: Le plan affine $\mathcal{P}$ dans E

2. Soit c_1, c_2, c_3 trois vecteurs n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}(i, j)$. Montrer que les points d'intersection de $\operatorname{Vect}(c_1)$, $\operatorname{Vect}(c_2)$, $\operatorname{Vect}(c_3)$ avec $\mathcal{P}$ sont alignés si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}_E}(c_1, c_2, c_3) = 0$$

3. On définit une fonction λ de E^6 dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in E^6 : \lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = \\ \det_{\mathcal{B}_E}\left((a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1), (a_2 \wedge b_3) \wedge (a_3 \wedge b_2), (a_3 \wedge b_1) \wedge (a_1 \wedge b_3)\right)$$

On se donne six vecteurs a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 dans $\mathcal{P}$ (fig. 2). Lorsque les points d'intersection c_1, c_2, c_3 existent, montrer qu'ils sont alignés si et seulement si

$$\lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = 0$$

Partie II. Condition de « coconicité ».

Une conique est une ligne de niveau d'une fonction du second degré. En particulier, des points M_i (avec i entre 1 et 6) du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x_i, y_i, 1)$ sont sur une même

Rémy Nicolai S0910E

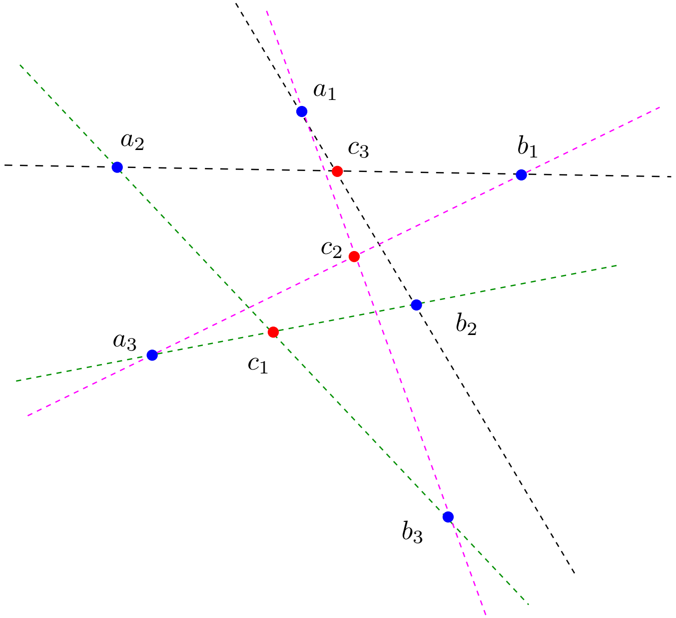

FIG. 2: Une configuration de 6 points dans $\mathcal{P}$

conique si et seulement si :

$$\exists (A,B,C,D,E,F) \in \mathbb{R}^6 \text{ non tous nuls et tels que } \forall i \in \{1,\cdots,6\}$$
$$Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cx_i + Dy_i^2 + Ey_i + F = 0$$

On définit une fonction μ de E^6 dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) \in E^6 :$$
$$\mu(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) = \det_{\mathcal{B}_\mathcal{S}}(s(u_1),s(u_2),s(u_3),s(u_4),s(u_5),s(u_6))$$

1. Soit $u \in E$ de coordonnées (x,y,z) dans la base $\mathcal{B}_E$. Calculer la matrice $s(u)$. En déduire les coordonnées de $s(u)$ dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$.
2. Montrer que les u_i (avec i entre 1 et 6) du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x_i,y_i,1)$ sont sur une même conique si et seulement si :

$$\mu(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) = 0$$

Partie III. Démonstration par « force brute ».

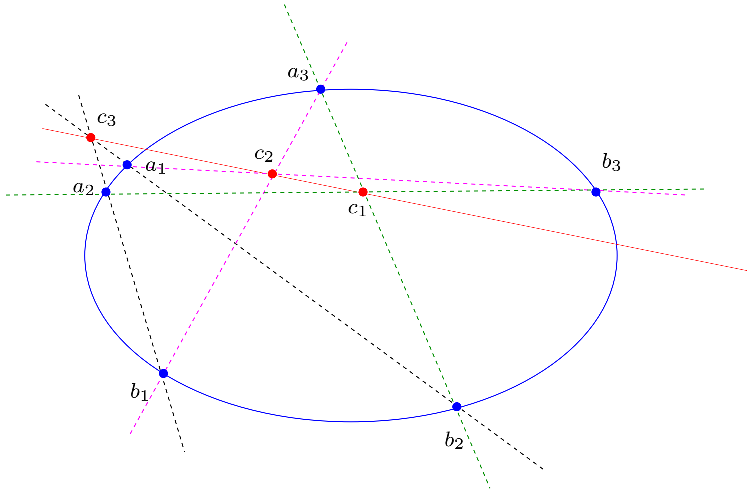

FIG. 3: Hexagramme de Pascal

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on établit :

$$\lambda = \mu$$

Formuler et démontrer un théorème relatif à l'hexagramme de Pascal (fig 3).

Dans les parties suivantes, on ramène la démonstration de cette égalité à des calculs accessibles à un humain.

Partie IV. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on définit une application c_M dans $\mathcal{S}$ par :

$$\forall S \in \mathcal{S} : c_M(S) = M S \, {}^tM$$

1. a. Montrer que $c_M \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$.
   b. Pour toutes matrices M et M' dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, préciser $c_{M'} \circ c_M$.
   c. Montrer que c_M est bijectif si et seulement si M est inversible.

2. Dans cette question
$$M = P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   a. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comment obtient-on $A\,{}^tM$ à partir de A ? Comment obtient-on MA à partir de A ?
   b. Calculer $c_M(S)$ avec
$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$
   c. Former la matrice de c_M dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. En déduire $\det c_{P_{1,2}}$.
   On admet que l'on obtient un résultat analogue pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et 3.
3. Dans cette question
$$M = A_{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   a. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comment obtient-on $A\,{}^tM$ à partir de A ? Comment obtient-on MA à partir de A ?
   b. Calculer $c_M(S)$ avec
$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$
   c. Former la matrice de c_M dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. En déduire $\det c_{A_{1,2}(\lambda)}$.
   On admet que l'on obtient un résultat analogue pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et 3.
4. Dans cette question
$$M = D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   a. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comment obtient-on $A\,{}^tM$ à partir de A ? Comment obtient-on MA à partir de A ?
   b. Calculer $c_M(S)$ avec
$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$
   c. Former la matrice de c_M dans $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. En déduire $\det c_{D_1(\lambda)}$.
   On admet que l'on obtient un résultat analogue pour tout i entier entre 1 et 3.
5. Montrer que
$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \det c_M = (\det M)^4$$

Partie V. Adjoint et image d'un produit vectoriel.

1. Questions de cours.
   a. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ une base orthonormée de E. Quel est le terme i, j de la matrice de f dans $\mathcal{U}$?
   b. Soit $(a, b, c) \in E^3$, $g \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{U}$ une base quelconque. Donner une autre expression pour :
$$\det_{\mathcal{U}}(g(a), g(b), g(c))$$
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on *définit l'adjoint* de f (noté ${}^tf$) par :
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E} {}^tf = {}^t(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E} f)$$
   a. Montrer que pour toute base orthonormée $\mathcal{U}$:
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{U}} {}^tf = {}^t(\operatorname{Mat}_{\mathcal{U}} f)$$
   b. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in E^2 : (f(x)/y) = (x/\,{}^tf(y))$$
   c. Montrer que ${}^tf$ est un automorphisme si et seulement si f est un automorphisme avec
$$\left({}^tf\right)^{-1} = {}^t\left(f^{-1}\right) \text{ noté } {}^tf^{-1}$$
3. Soit f un automorphisme de E. Montrer que :
$$\forall (a, b) \in E^2 : f(a) \wedge f(b) = (\det f)\,{}^tf^{-1}(a \wedge b)$$
4. Soit f un automorphisme de E et A sa matrice dans une base orthonormée. Quelle est la matrice de $(\det f)\,{}^tf^{-1}$ dans la même base orthonormée ?

Partie VI. Démonstration classique[1] .

1. En développant suivant la première colonne, vérifier l'égalité entre déterminants réels :
$$\begin{vmatrix} w_2u_1 & u_3u_2 & u_1v_3 \\ v_2w_1 & u_3v_2 & v_1v_3 \\ w_2w_1 & w_3u_2 & v_1w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1v_1 & u_2v_2 & u_3v_3 \\ v_1w_1 & v_2w_2 & v_3w_3 \\ u_1w_1 & u_2w_2 & u_3w_3 \end{vmatrix}$$
2. Montrer que, pour tout $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in E^6$ et tout $f \in GL(E)$,
$$\lambda\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(b_1), f(b_2), f(b_3)\right) = (\det f)^4 \, \lambda\left(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\right)$$
3. Soit $f \in GL(E)$ et M la matrice de f dans $\mathcal{B}_E$.
Montrer que, pour tout $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in E^6$,
$$\mu\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(b_1), f(b_2), f(b_3)\right) = (\det M)^4 \, \mu\left(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\right)$$
4. Pour i entre 1 et 3, les coordonnées dans $\mathcal{B}_E$ du vecteur b_i de E sont (u_i, v_i, w_i).
   a. Exprimer $\lambda(i, j, k, b_1, b_2, b_3)$ comme un déterminant 3×3.
   b. Exprimer $\mu(i, j, k, b_1, b_2, b_3)$ comme un déterminant 6×6 puis 3×3. Que peut-on en déduire ?
5. Soit $a_1, \cdots, a_6$ six vecteurs de E tels que (a_1, a_2, a_3) soit libre. Montrer que
$$\lambda(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \mu(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$
6. Dans $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, on définit $< ./. >$ par :
$$\forall (S, S') \in \mathcal{S}^2 : < S/S' >= \operatorname{tr}(SS')$$
   a. Montrer que $< ./. >$ est un produit scalaire de $\mathcal{S}$.
   b. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in E^2 : < s(x)/s(y) >= (x/y)^2$$
   c. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ est orthogonale. Est-elle orthonormée ?
   d. Montrer que, pour tous vecteurs $x_1, \cdots, x_6$ de E,
$$8\left(\mu(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\right)^2 = \begin{vmatrix} (x_1/x_1)^2 & (x_1/x_2)^2 & \cdots & (x_1/x_6)^2 \\ (x_2/x_1)^2 & (x_2/x_2)^2 & \cdots & (x_2/x_6)^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ (x_6/x_1)^2 & (x_6/x_2)^2 & \cdots & (x_6/x_6)^2 \end{vmatrix}$$

[1] en géométrie projective, les démonstrations consistent souvent à « expédier des objets à l'infini »