Exercice

1. Comme $A\cap A = A$, on a $f(A) = (A, A\cup B)$. Comme $A \subset A\cup B$, on a $A\cap(A\cup B) = A$. En ce qui concerne l'union, $B \cup (A \cup B) = A \cup B$.
   On en déduit $f(A) = f(A\cup B) = (A, A\cup B)$. On trouve aussi $f(\emptyset) = f(B\cap\overline{A}) = (\emptyset, B)$.
   Si f est injective, on en déduit $A = A \cup B$ ce qui est équivalent à $B \subset A$. On peut aussi en déduire $B \cap \overline{A} = \emptyset$ ce qui veut dire qu'un élément quelconque b de B n'est pas dans $\overline{A}$ donc il est dans A c'est à dire encore $B \subset A$.
2. On peut utiliser les distributivités démontrées en cours
$$\begin{aligned}(X \cup B) \cap \overline{B} = (X \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = X \cap \overline{B}\\ \Rightarrow (X \cap B) \cup \big((X \cup B) \cap \overline{B}\big) = (X \cap B) \cup (X \cap \overline{B}) = X \cap (B \cup \overline{B}) = X\end{aligned}$$
3. Dans cette question, on suppose $B \subset A$.
   a. Supposons que $A \cap X = A \cap Y$. Alors,
   $$B \cap X = B \cap (A \cap X) = B \cap (A \cap Y) = B \cap Y$$
   b. On veut montrer que f est injective lorsque $B \subset A$. Considérons deux parties quelconques X et Y de E et supposons que $f(X) = f(Y)$ c'est à dire que
   $$X \cap A = Y \cap A \quad\text{et}\quad X \cup B = Y \cup B$$
   D'après 3.a. : $B \cap X = B \cap Y$. Utilisons alors la question 2.
   $$X = (X \cap B) \cup \big((X \cup B) \cap \overline{B}\big) = (Y \cap B) \cup \big((Y \cup B) \cap \overline{B}\big) = Y$$

Problème 1

1. Pour former le graphe de φ (Figure **??**), il est inutile de dériver la fonction. L'écriture
$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{2+z-1}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}$$
met en évidence les asymptotes et le fait que le graphe est une hyperbole. Pour placer les branches, on considère $\varphi(0) = 1$.

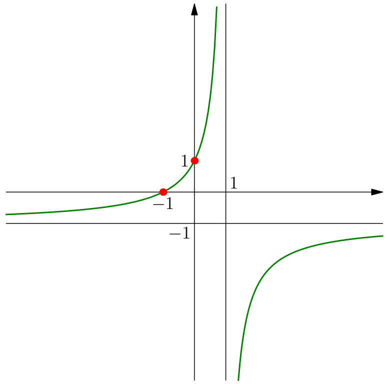

FIG. 1: Graphe de φ

2. Pour montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{C}-\{-1\}$ dans $\mathbb{C}-\{3\}$, on considère l'équation
$$\frac{3z-5}{z+1} = u \text{ d'inconnue } z \text{ et de paramètre } u \in \mathbb{C}, u \neq 3.$$
Cette équation admet une unique solution $\dfrac{u+5}{3-u}$ ce qui montre que tout $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 3$ admet un unique antécédent par f. L'expression de la solution nous donne cet antécédent et donc une expression de la bijection réciproque.
3. Tranformons la relation proposée : on utilise l'identité donnant $|a+b|^2$, on rassemble les termes, on divise par $1-k^2 \neq 0$:
$$\begin{aligned}|z_a|^2 = k^2|z-b|^2 &\Leftrightarrow (1-k^2)|z|^2 - 2\operatorname{Re}(a-k^2b)\overline{z} + |a|^2 - k^2|b|^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (1-k^2)|z|^2 - 2\operatorname{Re}\frac{a-k^2b}{1-k^2}\overline{z} = \frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}\\ &\Leftrightarrow \left|z - \frac{a-k^2b}{1-k^2}\right|^2 = \frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2} + \frac{|a-k^2b|^2}{(1-k^2)^2}\end{aligned}$$
Notons T le membre de droite de la dernière relation :
$$T = \frac{1}{(1-k^2)^2}\left(k^2|a|^2 + k^2|b|^2 - 2k^2\operatorname{Re}(a\overline{b})\right) = \frac{k^2}{(1-k^2)^2}|a-b|^2$$
On en déduit le u et le R demandés par l'énoncé :
$$u = \frac{1}{1-k^2}(a-k^2b), \qquad R = \frac{k}{1-k^2}|a-b|.$$
Il apparait alors clairement que l'ensemble des points dont l'affixe vérifie cette relation est un cercle de centre le point d'affixe u et de rayon R.

4. La recherche des points fixes de f conduit à l'équation du second degré
$$z^2 - 2z + 5 = 0$$
Son discriminant est $\Delta = -16 = (4i)^2$. On en déduit $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$.

5. Travaillons d'abord sur $f(z) - z_1$ en écrivant $z_1 = f(z_1)$ et en réduisant au même dénominateur. On obtient
$$f(z) - z_1 = f(z) - f(z_1) = \frac{3z-5}{z+1} - \frac{3z_1-5}{z_1+1} = \frac{8(z-z_1)}{(z+1)(z_1+1)}$$
Le calcul est analogue pour z_2. On en déduit :
$$\frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2} = \frac{(z_2+1)(z-z_1)}{(z_1+1)(z-z_2)} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

6. a. L'ensemble des points est un cercle d'après la question 3.

   b. Le centre du cercle est le point d'affixe u de la question 3. Ici cela devient :
$$u = \frac{1}{1-k^2}(z_1 - k^2 z_2) = \frac{1}{1-k^2}(1 - k^2 + 2i(1+k^2)) = 1 + 2\varphi(k^2)i$$
On cherche les points d'intersections du cercle avec la droite (Z_1Z_2) sous la forme
$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
La condition d'intersection s'écrit alors simplement en λ : $\left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| = k$. Cela conduit à deux équations du premier degré selon que l'on prenne l'intérieur de la valeur absolue égal à k ou à $-k$.
   - Pour k, on obtient $\lambda = -\frac{k}{1-k}$ et un point d'intersection d'affixe $1 + 2i\varphi(k)$.
   - Pour $-k$, on obtient $\lambda = \frac{k}{1+k}$ et un point d'intersection d'affixe $1 + 2i\varphi(-k)$. On peut remarquer que $\varphi(-k)$ est l'inverse de $\varphi(k)$.

7. a. On a vu que
$$\left|\frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_1}\right| = \left|\frac{1-i}{1+i}\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|$$
Si on note f^n la composée de f avec elle même n fois, on a alors :
$$\left|\frac{f^n(z)-z_1}{f^n(z)-z_1}\right| = \left|\frac{f^{n-1}(z)-z_1}{f^{n-1}(z)-z_1}\right| = \cdots = \left|\frac{z-z_1}{z-z_1}\right|$$
Ce qui signifie que tous les points sont sur $\mathcal{C}_k$ avec $k = \left|\frac{z-z_1}{z-z_1}\right|$.

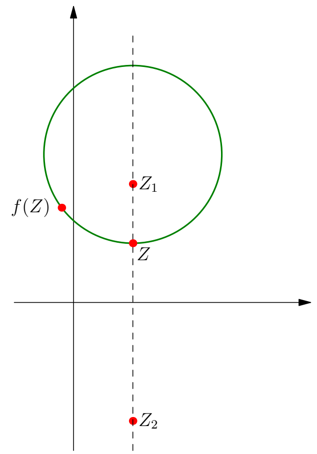

FIG. 2: Cercle de $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$

   b. Pour $z = 1 + i$, on trouve $k = |\frac{-i}{3i}| = \frac{1}{3}$, $\varphi(\frac{1}{3}) = 2$.
   On en déduit que les points d'intersections avec (Z_1Z_2) ont pour coordonnées $(1,1)$ et $(1,4)$. Le centre du cercle $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ (Figure **??**) est en $(1, \frac{5}{2})$ et le rayon est $\frac{3}{2}$.
   De plus $f(z) = \frac{-1+8i}{5}$.

Problème 2

Partie I. Inégalités classiques.

1. a. On veut montrer par récurrence que $1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$.
   Pour $n = 1$ et $a_1 \in [0,1]$, l'inégalité est triviale.
   Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$. Alors
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) &= \left(\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)(1-a_{n+1}) \\ &\geq (1-S_n)(1-a_{n+1}) \text{ par hypothèse de récurrence et car } 1 - a_{n+1} \geq 0 \\ &\geq 1 - \underbrace{(S_n + a_{n+1})}_{=S_{n+1}} + S_n a_{n+1} \geq 1 - S_{n+1}.\end{aligned}$$

b. On veut montrer par récurrence que $M_n(1+S_n) \leq 1$ (car $1+S_n>0$).
Pour $n=1$ l'inégalité est facile :

$$(1-a_1)(1+a_1) = 1-a_1^2 \leq 1.$$

Montrons que l'inégalité à l'ordre n entraine celle à l'ordre $n+1$.

$$\begin{aligned}
M_{n+1}(1+S_{n+1}) &= M_n(1-a_{n+1})(1+S_n+a_{n+1}) \\
&= M_n\left(\underbrace{1-a_{n+1}^2}_{\leq 1} + \underbrace{(1-a_{n+1})}_{\leq 1}S_n\right) \leq M_n(1+S_n) \leq 1.
\end{aligned}$$

2. a. En développant, l'inégalité $1+S_n \leq P_n$ est évidente car on néglige tous les autres termes du développement qui sont positifs.

b. On veut montrer par récurrence que, sous l'hypothèse $S_n<1$, $P_n(1-S_n) \leq 1$.
À l'ordre 1, l'inégalité est vérifiée :

$$P_1(1-S_1) = (1+a_1)(1-a_1) = 1-a_1^2 \leq 1.$$

Montrons que l'inégalité à l'ordre n entraine celle à l'ordre $n+1$.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(1-S_{n+1}) &= P_n(1+a_{n+1})\,(1-a_{n+1}-S_n) \\
&= P_n\left(\underbrace{(1-a_{n+1}^2)}_{\leq 1} - \underbrace{(1+a_{n+1})}_{>1}S_n\right) \leq P_n(1-S_n) \leq 1.
\end{aligned}$$

L'analogie entre les deux démonstrations est flagrante.
En fait, on peut déduire directement la deuxième inégalité de la première.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_k < 1$ donc

$$0 \leq 1-a_k^2 \leq 1 \Rightarrow M_nP_n \leq 1 \Rightarrow P_n \leq \frac{1}{S_n}.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de 1.a, comme $S_n<1$,

$$1-S_n \leq M_n \Rightarrow \frac{1}{M_n} \leq \frac{1}{1-S_n} \Rightarrow P_n \leq \frac{1}{1-S_n}$$

3. a. Voir le cours. L'inégalité de Cauchy-Schwarz résulte de ce que le discriminant du trinôme en t est négatif ou nul car le trinôme ne prend que des valeurs positives.

b. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec des n-uplets bien choisis

$$\forall i \left.\begin{aligned} x_i &= \sqrt{a_i} \\ y_i &= \frac{1}{\sqrt{a_i}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow n^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2 \leq \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}^2}_{=1}\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).$$

Partie II. Images et fonctions.

1. Réduisons au même dénominateur

$$a+\frac{b}{z}+\frac{c}{1-z} = \frac{-az^2+(a-b+c)z+b}{z(1-z)}.$$

Cela nous amène à considérer le système aux inconnues u,v,w :

$$(S)\;\begin{cases} -u = 1 \\ u-v+w = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

La réduction au même dénominateur montre que

$$(a,b,c) \text{ solution de } (S) \Rightarrow a+\frac{b}{z}+\frac{c}{1-z} = \frac{(1+z)^2}{z(1-z)}.$$

La résolution du système est immédiate. On en déduit

$$g(z) = \frac{(1+z)^2}{z(1-z)} = -1+\frac{1}{z}+\frac{4}{1-z}.$$

2. D'après la décomposition précédente,

$$g'(z) = -\frac{1}{z^2}+\frac{4}{(1-z)^2} = \left(\frac{2}{1-z}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{2}{1-z}-\frac{1}{z}\right) = \frac{(z+1)(3z-1)}{z^2(1-z)^2}.$$

On en déduit le tableau des variations avec $g(\frac{1}{3}) = \frac{4^2}{2} = 8$

	0		$\frac{1}{3}$		1
g'		-	0	+	
g		$\searrow$	8	$\nearrow$	

3. Calcul de la dérivée de f_z :

$$
\begin{aligned}
f_z'(t) &= K_z\left(-\frac{1}{t^2}(\frac{1}{1-z-t}-1)+(\frac{1}{t}-1)\frac{1}{(1-z-t)^2}\right)\\
&= \frac{K_z}{t^2(1-z-t)^2}\left(-(z+t)(1-z-t)+(1-t)t\right) = \frac{K_z z\left(2t-(1-z)\right)}{t^2(1-z-t)^2}.
\end{aligned}
$$

On en déduit le tableau des variations avec

	0	$\frac{1-z}{2}$	$1-z$
f_z'	-	0	$+$
f_z	$\searrow$ $f_z(\frac{1-z}{2}) = g(z)$		$\nearrow$

car

$$
f_z(\frac{1-z}{2}) = \frac{1-z}{z}\left(\frac{2}{1-z}-1\right)^2 = \frac{(1+z)^2}{z(1-z)} = g(z).
$$

4. a. cours : avec un $\exists$

   b. Pour un z fixé, $x+y+1=1$ si et seulement si $y = 1-z-x$ donc

$$
\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} = f_z(x)
$$

   On en déduit $\mathcal{P} = \bigcup_{z\in I} f_z(I_z)$ avec $f_z(I_z) = [g(z), +\infty[$ d'après le tableau de la question 3. D'après le tableau de g :

$$
\bigcup_{z\in I}[g(z), +\infty[= [8, +\infty[.
$$

   c. En multipliant par xyz on obtient

$$
8 \leq \frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} \Rightarrow 8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z).
$$

Partie III. Inégalité de Ky Fan.

1. Preuve de $\mathcal{F}_2$.

   a. On développe (les termes en $aba'b'$ se simplifient) puis on factorise :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2a'b' - (a'+b')^2ab &= a^2ba'b' + b^2a'b' - a'^2ab - b'^2ab\\
&= aa'(ab'-a'b) + bb'(ba'-b'a) = (ab'-a'b)(aa'-bb').
\end{aligned}
$$

   Si $a' = 1-a$ et $b' = 1-b$, cette relation devient

$$
(a+b)^2(1-a)(1-b) - ((1-a)+(1-b))ab = (a-b)^2(1-a-b).
$$

   b. D'après la question précédente, comme $1-a-b \geq 0$ pour a et b dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$,

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2(1-a)(1-b) - ((1-a)+(1-b))ab \geq 0\\
&\Rightarrow ((1-a)+(1-b))ab \leq (a+b)^2(1-a)(1-b)\\
&\Rightarrow \frac{ab}{(1-a)(1-b)} \leq \left(\frac{a+b}{(1-a)+(1-b)}\right)^2.
\end{aligned}
$$

   Ce qui prouve l'inégalité de Ky Fan à l'ordre 2.

2. a. On veut montrer que $\mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F}_{2n}$. On se donne donc $2n$ nombres a_i dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. On les rassemble en deux groupes de n et on introduit les objets sur lesquels portent les inégalités.

$$
P_1 = \prod_{i=1}^{n} a_i, \quad S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad P_1' = \prod_{i=1}^{n}(1-a_i), \quad S_1' = \sum_{i=1}^{n}(1-a_i)
$$
$$
P_2 = \prod_{i=n+1}^{2n} a_i, \quad S_2 = \sum_{i=n+1}^{n} a_i, \quad P_2' = \prod_{i=n+1}^{2n}(1-a_i), \quad S_2' = \sum_{i=n+1}^{2n}(1-a_i).
$$

   Remarquons que les inégalités $a_i \leq \frac{1}{2}$ entrainent $S_1 \leq \frac{n}{2}$ et $S_2 \leq \frac{n}{2}$.
   Avec ces notations, on veut montrer

$$
\frac{P_1\,P_2}{P_1'\,P_2'} \leq \left(\frac{S_1+S_2}{S_1'+S_2'}\right)^{2n}.
$$

   On commence par appliquer l'inégalité KF à l'ordre n pour chaque groupe

$$
\frac{P_1\,P_2}{P_1'\,P_2'} \leq \left(\frac{S_1}{S_1'}\frac{S_2}{S_2'}\right)^{n}.
$$

Il suffit donc de montrer
$$\frac{S_1\,S_2}{S_1'\,S_2'} \leq \left(\frac{S_1+S_2}{S_1'+S_2'}\right)^2 .$$
C'est équivalent à la positivité d'une expression analogue à celle de 1.a.
$$\begin{aligned}(S_1+S_2)^2S_1'S_2' - (S_1'+S_2')S_1S_0 &= (S_1S_2'-S_2S_1')(S_1S_1'-S_2S_2') \\ &= n(S_1-S_2)^2(n-S_1-S_2) \text{ car } S_i' = n - S_i \\ &\geq 0 \text{ car } S_1 \text{ et } S_2 \text{ sont } \leq \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

b. On veut montrer $\mathcal{F}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{F}_n$. On se donne donc des $a_1, \cdots, a_n$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Pour pouvoir exploiter l'hypothèse $\mathcal{F}_{n+1}$, on a besoin d'un $n+1$-ième nombre. Comme l'énoncé nous y invite, on considère
$$a_n = \frac{S_n}{n}.$$
Il est dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ car c'est la moyenne des a_i déjà définis qui y sont déjà.
Utilisons des notations simplifiée analogues à celles définies dans la question précédente pour $S = S_n'$, $P = P_n$, $P' = P_n'$ et $a = a_{n+1} = \frac{S}{n}$.
Appliquons KF à l'ordre $n+1$ avec la famille ainsi complétée.
$$\frac{Pa}{P'(1-a)} \leq \left(\frac{S+a}{S'+1-a}\right)^{n+1}$$
Remplaçons a par $\frac{S}{n}$ en remarquant que
$$S + a = \frac{(n+1)S}{n},\ 1 - a = 1 - \frac{S}{n} = \frac{n-S}{n} = \frac{S'}{n},\ S' + 1 - a = \frac{(n+1)S'}{n}.$$
Il vient :
$$\frac{nPS}{nP'S'} \leq \left(\frac{(n+1)Sn}{n(n+1)S'}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{P}{P'} \leq \left(\frac{S}{S'}\right)^n .$$

c. D'après $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F}_{2n}$, la propriété $\mathcal{F}_n$ est vérifiée par récurrence pour tous les entiers n qui sont des puissances de 2. Si n n'est pas une puissnce de 2, il existe p tel que $n < 2^p$ et on peut déduire $\mathcal{F}_n$ de $\mathcal{F}_{2^p}$ et de $\mathcal{F}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{F}_n$.

3. a. On doit caractériser « combien petit doit être λ ». Il doit être plus petit que tous c'est à dire plus petit que le plus petit.
$$\left(\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda a_i \leq \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda \leq \min A.$$

b. D'après la question précédente, on peut trouver des λ assez petit pour que l'on puisse appliquer KF aux λa_i. Appliquons la avec les notations
$$P = a_1 \cdots a_n,\ S = a_1 + \cdots + a_n,\ P_\lambda' = (1-\lambda a_1)\cdots(1-\lambda a_n).$$
On obtient
$$\frac{\lambda^n P}{P_\lambda'} \leq \left(\frac{\lambda S}{n - \lambda S}\right)^n \Rightarrow \frac{P}{P_\lambda'} \leq \left(\frac{S}{n-\lambda S}\right)^n$$
Pour n et les a_i fixés, quand $\lambda \to 0$, on a $P_\lambda' \to 1$ et $n - \lambda S \to n$. En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient
$$P \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n .$$
la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.