Exercice

Soit E un ensemble et A, B deux parties fixées de E. On définit une fonction f par

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto f(X) = (A \cap X, B \cup X) \end{cases}$$

1. Préciser $f(A)$, $f(A \cup B)$, $f(\emptyset)$, $f(B \cap \overline{A})$. Que peut-on en déduire si f est injective ?
2. Soit X une partie de E, montrer que
$$X = (X \cap B) \cup \big((X \cup B) \cap \overline{B}\big)$$
3. Dans cette question, on suppose $B \subset A$.
   a. Montrer que :
$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \cap X = A \cap Y \Rightarrow B \cap X = B \cap Y$$
   b. Montrer que f est injective.

Problème 1

On définit une application f de $\mathbb{C} - \{-1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une application φ de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(z) = \frac{3z-5}{z+1}, \qquad \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction φ.
2. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{C} - \{-1\}$ dans $\mathbb{C} - \{3\}$ et que z non réel entraine $f(z)$ non réel.
3. Soit a, b des nombres complexes et $k \in]0,1[$. Exprimer en fonction de a, b, k un nombre complexe u et un réel strictement positif R tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z-a|^2 = k^2|z-b|^2 \Leftrightarrow |z-u|^2 = R^2$$
4. Un nombre complexe z est dit *point fixe* de f si et seulement si $f(z) = z$.
Déterminer les points fixes de f. On notera z_1 celui dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre. On note Z_1 et Z_2 les points d'affixes z_1 et z_2.
5. Exprimer $\dfrac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2}$ en fonction de $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$.
6. Soit $k \in]0,1[$.
   a. Montrer que l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie
$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$$
   est un cercle (noté $\mathcal{C}_k$).
   b. Calculer les coordonnées du centre de $\mathcal{C}_k$ et des points d'intersection avec la droite (Z_1, Z_2). Exprimer les deuxièmes coordonnées à l'aide de φ.
7. a. Soit z un nombre complexe non réel et n un entier naturel, montrer que tous les points d'affixes
$$z, f(z), f \circ f(z), \cdots, \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(z)$$
   sont sur un même cercle.
   b. Préciser ce cercle pour $z = 1+i$. Le dessiner en portant les points d'intersection avec la droite (Z_1Z_2) et les points d'affixes z et $f(z)$.

Problème 2

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in]0,1[^n$, on appelle *produits de Weierstrass* les expressions

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+a_k), \qquad M_n = \prod_{k=1}^{n} (1-a_k).$$

On note aussi $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
L'objet de ce problème est de présenter des inégalités faisant intervenir ces objets ou des expressions analogues. Les parties sont indépendantes entre elles.

Partie I. Inégalités classiques.

1. Encadrement de M_n.
   a. Montrer par récurrence que $1 - S_n \leq M_n$.
   b. Montrer par récurrence que $M_n \leq \frac{1}{1+S_n}$.
2. Encadrement de P_n.
   a. Montrer que $1 + S_n \leq P_n$.
   b. On suppose $S_n < 1$, montrer que $P_n \leq \frac{1}{1-S_n}$.

3. a. Pour $(x_1, \cdots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ et $(y_1, \cdots, y_n) \in]0, +\infty[^n$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$
en utilisant
$$t \mapsto \sum_{i=1}^{n} (tx_i + y_i)^2.$$
b. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in]0, 1[^n$. En remarquant que $a_i = (\sqrt{a_i})^2$, montrer que
$$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$
en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Partie II. Images et fonctions.

Dans cette partie, on note $I =]0, 1[$ et on considère
$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} \text{ tq } (x, y, z) \in I^3 \text{ et } x + y + z = 1 \right\}.$$

1. En considérant un système d'équations aux inconnues réelles u, v, w, préciser des réels a, b, c tels que
$$\forall z \in I, \ \frac{(1+z)^2}{z(1-z)} = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{1-z}.$$
L'unicité du triplet (a, b, c) n'est pas demandée. Dans votre rédaction, toute proposition induisant l'unicité dévalorisera votre copie. Soyez attentif au sens des implications que vous écrirez.
2. Former le tableau de variations de la fonction g de I dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall z \in I, \ \ g(z) = \frac{(1+z)^2}{z(1-z)}.$$
3. Pour tout $z \in]0, 1[$, on définit une fonction f_z de $]0, 1-z[$ (noté I_z) dans $\mathbb{R}$ par
$$\forall t \in I_z, \ f_z(t) = K_z \left(\frac{1}{t} - 1\right)\left(\frac{1}{1-z-t} - 1\right) \text{ avec } K_z = \frac{1}{z} - 1.$$
Former le tableau de variations de f_z.
4. a. Rappeler la définition de $f_z(I_z)$ avec des quantificateurs.
b. Montrer que
$$\mathcal{P} = \bigcup_{z \in I} f_z(I_z) = \bigcup_{z \in I} [\, g(z), +\infty[= [8, +\infty[\,.$$
c. Montrer que
$$\forall (x, y, z) \in I^3, \ x + y + z = 1 \Rightarrow 8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z).$$

Partie III. Inégalité de Ky Fan.

Dans cette partie, on veut montrer l'*inégalité de Ky Fan* pour tout $n \in N^*$:
$$\mathcal{F}_n : \qquad \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \left]0, \frac{1}{2}\right]^n, \ \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}\right)^n$$

1. Preuve de $\mathcal{F}_2$.
   a. Pour a, b, a', b' réels, développer et factoriser $(a+b)^2 a'b' - ab(a'+b')^2$. Que devient cette relation si $a' = 1-a$ et $b' = 1-b$?
   b. Montrer $\mathcal{F}_2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$.
   a. Montrer que $\mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F}_{2n}$.
   b. Montrer que $\mathcal{F}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{F}_n$. Pour $a_1, \cdots, a_n$ fixés, on pourra considérer $\frac{S_n}{n}$.
   c. Montrer $\mathcal{F}_n$.
3. Dans cette question $(a_1, \cdots, a_n) \in]0, +\infty[^n$. On note
$$A = \left\{ \frac{1}{2a_i}, i \in [\![1, n]\!] \right\}.$$
   a. Soit $\lambda > 0$. Traduire la proposition
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda a_i \leq \frac{1}{2}$$
   par une inégalité faisant intervenir $\max A$ ou $\min A$.
   b. Rappeler la définition de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de $a_1, \cdots, a_n$. En utilisant l'inégalité de Ky Fan (à l'exlusion de toute autre méthode), montrer une inégalité entre ces deux moyennes.