Exercice 1

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2xy \leq x^2 + y^2$. L'inégalité demandée s'obtient en posant $x = a_1 b_2$ et $y = a_2 b_1$.

b. Le résultat étant évident pour $n = 1$, initialisons la récurrence au rang $n = 2$. Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 &= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2 a_1 a_2 b_1 b_2 \\ &\geq a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 a_2^2 b_1^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).\end{aligned}$$

Par croissance de la racine carrée et positivité des a_i, b_i, il vient
$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq (a_1^2 + a_2^2)^{1/2} (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$.
Supposons le résultat vrai au rang n. Soient $a_1, ..., a_{n+1}, b_1, ..., b_{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j b_j\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2} + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2 \quad \text{par hyp. de récurrence} \\ &\leq \left(\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\right)^2 + a_{n+1}^2\right)\left(\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}\right)^2 + b_{n+1}^2\right) \quad \text{d'après le cas } n = 2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j^2\right)\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est démontrée.

c. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, posons :

$$\alpha_j = a_j^{1/2 - x/2} b_j^{1/2 + x/2} \qquad \beta_j = a_j^{1/2 + x/2} b_j^{1/2 - x/2}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j\right)^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2\right) \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-x} b_j^{1+x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right)\end{aligned}$$

2. Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

a. L'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{ch}(\lambda x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \lambda \operatorname{sh}(\lambda x)$. Comme la fonction sh est impaire, $\lambda \operatorname{sh}(\lambda x)$ est du signe de x. Donc la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle atteint un minimum en 0 et $g(0) = 1$.

b. Soit $x \geq 0$. Développons le produit :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x} a_k^{1-x} b_k^{1+x} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_j a_k b_j b_k \left[\left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right)^x + \left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right)^{-x}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_j^2 + 4 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right) x\right)\end{aligned}$$

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la fonction f est une somme de fonction croissantes sur $\mathbb{R}_+$ donc c'est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, $f(0) \leq f(1)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'en déduit puisque :

$$f(0) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \qquad \text{et} \qquad f(1) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$

Plus généralement, la croissance de f montre que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $x \leq y$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+y} b_j^{1-y}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-y} b_j^{1+y}\right).$$

Rémy Nicolai Benoît SaleurS1803C

d. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si $f(0) = f(1)$, si et seulement si pour tout $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j < k$, la fonction :

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right) x\right)$$

est constante, ie $a_j b_k = a_k b_j$. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si :

$$\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_j b_k = a_k b_j.$$

Exercice 2

1. Comme $0 < k < 1$, la fonction $t \mapsto \sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}$ ne s'annule pas. Son inverse est continue et admet des primitives. La fonction F est une de ces primitives, celle qui prend la valeur 0 en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}}.$$

On montre que la fonction est impaire en utilisant le changement de variable $\theta = -t$ dans $F(-x)$.

2. Dans l'intégrale K, effectuons le changement de variable $\theta = \pi - t$.

$$K = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\theta}{\sqrt{1 - (-\sin\theta)^2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}}$$

En décomposant l'intégrale F en $\frac{\pi}{2}$ par la relation de Chasles, on obtient $F = 2K$.

3. Par la relation de Chasles, pour tout réel x,

$$F(x+\pi) = \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}}}_{=T} + \int_{\pi}^{x+\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}} = T + F(x)$$

en utilisant le changement de variable $\theta = t - \pi$ dans l'intégrale entre π et $\pi + x$.

4. Pour tout $x > 0$, $F(x) \geq x$. En effet

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 < \sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)} < 1 \Rightarrow F'(x) \geq x.$$

On conclut avec un tableau de variation ou la conservation des inégalité par intégration. On en déduit que la fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par imparité, elle est dérivable strictement croissante dans $\mathbb{R}$ avec les limites $-\infty$ et $+\infty$. C'est donc une bijection.

5. D'après la question 3, pour tout y réel,

$$A(F(y) + T) = y + \pi \Rightarrow \sin(A(F(y) + T)) = -\sin y$$

Pour un réel x quelconque, considérons $y = A(x)$. On a alors

$$x = F(y) \Rightarrow \sin(A(x+T)) = -\sin(A(x)) \Rightarrow \operatorname{sn}(x+T) = -\operatorname{sn}(x).$$

On en déduit que la fonction sn est $2T$-périodique.

6. D'après les formules pour la dérivée d'une fonction composée et d'une bijection réciproque

$$\operatorname{sn}'(x) = A'(x)\operatorname{cn}(x) = \frac{1}{F'(A(x))}\operatorname{cn}(x) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(A(x))}\operatorname{cn}(x) = \operatorname{dn}(x)\operatorname{cn}(x).$$

La démonstration pour cn' est analogue en tenant compte de $\cos' = -\sin$

$$\operatorname{cn}'(x) = -\operatorname{dn}(x)\operatorname{sn}(x)$$

7. Soient $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in]0, \pi/2[$. L'énoncé définit $k = \sin(\theta_0/2)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\theta(x) = 2\arcsin(k\operatorname{sn}(\omega x + K)).$$

a. Calcul de $\theta'(x)$ et $\theta''(x)$.

$$\theta'(x) = 2k\omega\frac{\operatorname{sn}'(\omega x + K)}{\sqrt{1 - (k\operatorname{sn}(\omega x + k))^2}} = 2k\omega\frac{\operatorname{dn}(\omega x + K)\operatorname{cn}(\omega x + K)}{\operatorname{dn}(\omega x + K)}$$
$$= 2k\omega\operatorname{cn}(\omega x + K)$$

$$\theta''(x) = -2k\omega^2\operatorname{dn}(\omega x + K)\operatorname{sn}(\omega x + K).$$

D'autre part,

$$\sin(\theta(x)) = 2\sin(\arcsin(k\operatorname{sn}(\omega x + K)))\cos(\arcsin(k\operatorname{sn}(\omega x + K)))$$
$$= 2k\operatorname{sn}(\omega x + K)\sqrt{1 - k\operatorname{sn}^2(\omega x + K)} = 2k\operatorname{sn}(\omega x + K)\operatorname{dn}(\omega x + K).$$

En combinant, on déduit

$$\theta''(x) + \omega \sin(\theta(x)) = 0.$$

Comme $K = F(\frac{\pi}{2})$, $A(K) = \frac{\pi}{2}$ donc $\operatorname{sn}(K) = \sin(A(K)) = 1$ et

$$\theta(0) = \arcsin(k \operatorname{sn}(K)) = \arcsin(k) = \arcsin(\sin \theta_0) = \theta_0.$$

De même $\operatorname{cn}(K) = \cos(A(K)) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc

$$\theta'(0) = 2k\omega \operatorname{cn}(K) = 0.$$

b. Comme sn est $2T$-périodique, θ est $\frac{2T}{\omega}$-périodique.

Problème

Partie préliminaire.

1. Notons φ la fonction dont on veut montrer qu'elle est constante et F la primitive de f nulle en 0. Pour tout x réel,

$$\varphi(x) = F(x+T) - F(x) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

car la fonction f est T-périodique. Comme φ est à dérivée nulle sur un intervalle, elle est constante.

2. Notons $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. La fonction φ est dérivable dans $\mathbb{R}^*$ avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

La fonction φ est donc constante dans chacun des intervalles formant son domaine.

$$x > 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $x < 0$, $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2}$ car la fonction est impaire.

3.

$$\cos\theta = \cos(2\frac{\theta}{2}) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \tan^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

Partie I. Calcul direct de $I_0(z)$.

1. On effectue le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$ puis on intègre avec un arctan.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}\frac{2\,dt}{1+t^2}$$
$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2} = \frac{2}{(1-r)^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{1+r}{1-r}\,t\right)^2}$$
$$= \frac{2}{(1-r)^2}\left[\frac{1-r}{1+r}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\,t\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{1-r^2}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

2. a. Avec $z = |z|e^{i\varphi}$, considérons

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-z} = \frac{e^{it}(e^{-it}-\overline{z})}{|e^{it}-z|^2} = \frac{1-|z|e^{i(t-\varphi)}}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}.$$

La partie réelle de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle.

$$A(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|\cos(t-\varphi)}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}\,dt.$$

On peut calculer facilement la partie imaginaire avec une primitive.

$$B(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-|z|\sin(t-\varphi)}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}\,dt$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\ln\left(1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

à cause de la 2π-périodicité.

b. En écrivant

$$1-|z|\cos(t-\varphi) = \frac{1}{2}\left(1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)\right) - \frac{1}{2}\left(1+|z|^2\right)+1$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)\right) + \frac{1}{2}\left(1-|z|^2\right)$$

et avec la partie imaginaire nulle, on obtient

$$I_0(z) = A(z) = \frac{1}{2} + \frac{1-|z|^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}.$$

3. Transformons l'intégrale à exprimer :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)} \\
&= \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} \quad \text{(chgt. de v. } \theta = t-\varphi) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} \quad \text{(question 1 Partie Préliminaire)} \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} \quad \text{(parité)} \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta}\right) \quad \text{(Chasles)} \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+|z|^2+2|z|\cos\varphi}\right) \\
&\qquad (\varphi = \pi-\theta \text{ dans int. 2}).
\end{aligned}$$

Utilisons la question 1 avec $r = \pm|z|$, il vient

$$I_0(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1+|z|}{1-|z|} + \arctan\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)
= \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \text{ si } \frac{1+|z|}{1-|z|} > 0 \Leftrightarrow |z| < 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0 \text{ si } \frac{1+|z|}{1-|z|} < 0 \Leftrightarrow |z| > 1 \end{cases}$$

avec la question 2 de la partie préliminaire.

Partie III. Propriétés de l'indice.

1. La solution évidente est $t \mapsto \gamma(t) - z$.
2. D'après le cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre, les solutions sont les fonctions λe^F où $\lambda \in \mathbb{C}$ et F est une primitive de $t \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$. On peut exprimer F avec une intégrale, par exemple

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\,du.$$

Le coefficient λ fait coïncider la condition initiale en $t = 0$, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) - z = (\gamma(0)-z)e^{\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\,du}.$$

3. La fonction $\gamma - z$ est 2π-périodique, l'expression précédente en $t = 2\pi$ montre

$$e^{\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\,du} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\,du \in 2i\pi\mathbb{Z} \Rightarrow I_\gamma(z) \in \mathbb{Z}.$$