Exercice 1

Soit n naturel non nul et $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$ des réels strictement positifs.

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

   a. Montrer que $2a_1a_2b_1b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$.

   b. En déduire par récurrence l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$

   c. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des familles bien choisies, montrer
   $$\forall x \geq 0,\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-x} b_j^{1+x}\right).$$

2. Dans cette question, on démontre une généralisation qui fournit une preuve nouvelle et indépendante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   On considère la fonction
   $$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-x} b_j^{1+x}\right) \end{cases}$$

   a. Soit λ réel non nul. Former le tableau de variations de la fonction $x \to \operatorname{ch}(\lambda x)$ définie dans $\mathbb{R}$.

   b. En développant $f(x)$, montrer que c'est la somme d'un nombre réel et d'une combinaison d'expressions contenant des cosinus hyperboliques.

   c. Montrer que f est croissante dans $\mathbb{R}^+$. En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   Par rapport à 1.b., quelles nouvelles inégalités a-t-on obtenu ?

   d. En utilisant le développement de 2.b. prouver le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2

Soit $k \in]0,1[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}}$.

1. Montrer que la fonction F est bien définie, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.
2. Posons $K = F(\pi/2)$ et $T = F(\pi)$. Montrer que $T = 2K$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x + \pi) = F(x) + T$.
4. Montrer que $F(x) \geq x$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que F réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   Notons $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera également :
   $$\operatorname{sn}(x) = \sin(A(x)), \qquad \operatorname{cn}(x) = \cos(A(x)), \qquad \operatorname{dn}(x) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}(x)^2}.$$
5. Montrer que la fonction sn est $2T$-périodique.
6. Montrer que les fonctions sn et cn sont dérivables et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\operatorname{sn}'(x) = \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{cn}'(x) = -\operatorname{sn}(x)\operatorname{dn}(x)$$
7. Soient $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in]0, \pi/2[$. Posons $k = \sin(\theta_0/2)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\theta(x) = 2\arcsin(k \operatorname{sn}(\omega x + K)).$$

   a. Montrer que θ vérifie :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \theta''(x) + \omega^2 \sin(\theta(x)) = 0,\ \theta(0) = \theta_0,\ \theta'(0) = 0.$$

   b. Montrer que θ est périodique et déterminer une période.

Problème

Ce texte fait intervenir des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, périodiques de période 2π et à valeurs dans $\mathbb{C}$. De telles fonctions sont appelées des *lacets*. Un lacet γ peut être vu comme un mouvement. Pour $t \in \mathbb{R}$, le complexe $\gamma(t)$ représente la position dans le plan d'un point mobile. La trajectoire (notée Γ) est l'ensemble des points par où est passé le mobile. À cause de la périodicité,
$$\Gamma = \{\gamma(t),\ t \in \mathbb{R}\} = \{\gamma(t),\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Rémy Nicolai Benoît SaleurS1803E

(a) $\gamma(t) = e^{it}$. (b) $\gamma(t) = e^{2it} - e^{it} - 1$.

FIG. 1: Exemples de trajectoires.

Les figures **??** et **??** présentent les trajectoires Γ pour deux lacets.

Pour un lacet γ et un complexe $z \notin \Gamma$, *l'indice* de z par rapport à γ est

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt.$$

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes où $\gamma'(t)$ est la notation habituelle pour la dérivée de γ. Pour un nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$, on note $I_0(z)$ son indice par rapport au mouvement circulaire.

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z}\, dt \qquad \text{avec } \gamma(t) = e^{it}.$$

Partie préliminaire.

1. Soit f continue dans $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$ et à valeurs complexes. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ est constante.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$
3. Pour θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, exprimer $\cos\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$.

Partie I. Calcul direct de $I_0(z)$.

Dans cette partie, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ est un argument de z. On note

$$A(z) = \mathrm{Re}(I_0(z)), \qquad B(z) = \mathrm{Im}(I_0(z)).$$

1. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$. En effectuant le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$, montrer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} = \frac{2}{1 - r^2} \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$
2. a. Montrer que
$$A(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|\cos(t - \varphi)}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos(t - \varphi)}\, dt, \qquad B(z) = 0.$$
   b. Montrer que
$$I_0(z) = \frac{1}{2} + \frac{1 - |z|^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos(t - \varphi)}.$$
3. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos(t - \varphi)} = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + |z|^2 + 2|z|\cos\theta}\right).$$
En déduire $I_0(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } |z| < 1 \\ 0 \text{ si } |z| > 1 \end{cases}$.

Partie II. L'indice est un entier.

On revient au cas général : γ est un lacet et $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ n'est pas sur la trajectoire. On considère l'équation différentielle

$$(\gamma - z)y' - \gamma' y = 0$$

où la fonction inconnue y est à valeurs complexes.

1. Déterminer la solution évidente qui prend en $t = 0$ la valeur $\gamma(0) - z$.
2. En utilisant un résultat de cours cité précisément, exprimer cette solution avec la fonction exponentielle complexe et une intégrale.
3. Montrer que $I_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.