Exercice 1

1. L'addition parallèle est clairement commutative. L'associativité se déduit de ce que
$$(a//b)//c = \frac{\frac{ab}{a+b}c}{\frac{ab}{a+b}+c} = \frac{abc}{ab+ac+bc}$$
s'exprime de manière symétrique en fonction de a, b, c.
Il n'existe pas de neutre car $a//b = b$ entrainerait $0 = b^2$. La question des éléments inversibles ne se pose pas car il n'y a pas d'élément neutre.
2. L'ensemble des $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y + z = x$ est aussi l'ensemble des $(y, x-y)$ où y est un réel quelconque.
Considérons la fonction du second degré en y
$$ay^2 + b(x-y)^2 = (a+b)y^2 - 2bxy + bx^2$$
Comme $a + b > 0$, la plus petite valeur que prend cette expression est atteinte pour
$$y_0 = \frac{bx}{a+b}$$
et vaut
$$\frac{b^2x^2}{a+b} - \frac{2b^2x^2}{a+b} + bx^2 = \frac{ab}{a+b}x^2.$$
Ainsi, $(a//b)x^2$ est non seulement la borne inférieure mais aussi le plus petit élément de l'ensemble proposé. La relation est vérifiée pour
$$(y_0, z_0) = (\frac{bx}{a+b}, x - \frac{bx}{a+b}).$$
3. Avec les conventions de l'énoncé, ay^2 et bz^2 représentent les énergies dissipées dans chaque résistance. Le courant se répartit entre les deux branches de façon à minimiser l'énergie dissipée. La résistance équivalente $a//b$ permet d'exprimer cette énergie en respectant la loi d'Ohm.
4. Considérons des réels y et z quelconques tels que $y + z = x$. D'après la question précédente :
$$(a//c)x^2 + (b//d)x^2 \leq ay^2 + cz^2 + by^2 + dz^2 = (a+b)y^2 + (c+d)z^2$$
Donc $(a//c)x^2 + (b//d)x^2$ est un minorant de
$$\{(a+b)y^2 + (c+d)z^2, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \,\text{tq}\, y + z = x\}.$$
Comme la borne inférieure $((a+b)//(c+d))$ est le plus grand des minorants, on a bien l'inégalité proposée.
5. Cette formule s'obtient de manière évidente par récurrence à partir de la précédente.

Exercice 2

1. a. Il s'agit d'une simple vérification. On développe et ordonne d'abord le crochet de droite, on obtient :
$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc)$$
Quand on multiplie par $a + b + c$, on obtient :
$$\begin{aligned} &2(a^3 + b^3 + c^3) + 2(ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2) \\ &\quad - 2(a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + c^2a) \\ &\quad = 2(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc \end{aligned}$$
b. Dans la relation précédente, en remplaçant a par $a^{\frac{1}{3}}$, b par $b^{\frac{1}{3}}$, c par $c^{\frac{1}{3}}$, on obtient (tout est > 0)
$$a + b + c = 3(abc)^{\frac{1}{3}} + \text{terme positif avec des puissances } \frac{1}{3}$$
De même, en remplaçant a par $a^{-\frac{1}{3}}$, b par $b^{-\frac{1}{3}}$, c par $c^{-\frac{1}{3}}$, on obtient
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3(abc)^{-\frac{1}{3}} + \text{terme positif avec des puissances } -\frac{1}{3}$$
Cela prouve les inégalités demandées.
2. Les deux inégalités de la question précédentes se reformulent en :
$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq (abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$
Il s'agit de la comparaison classique entre moyennes *harmonique*, *géométrique* et *arithmétique*.
Les suites sont bien définies car chaque nouveau terme est strictement positif ce qui permet la poursuite du processus. La comparaison des moyennes montre par récurrence que
$$\forall n \geq 1 : c_n \leq b_n \leq a_n$$

3. On va montrer successivement :
   - que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   - que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   - que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (la limite est notée c) et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (la limite est notée a)
   - que $a = c$.

   Preuve de la croissance de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$c_n \leq b_n \leq a_n \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} \leq \dfrac{1}{c_n} \\ \dfrac{1}{b_n} \leq \dfrac{1}{c_n} \end{cases} \Rightarrow c_{n+1} = \frac{3}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}} \geq c_n$$
   Preuve de la décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$c_n \leq b_n \leq a_n \Rightarrow \begin{cases} c_n \leq a_n \\ b_n \leq a_n \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3} \leq a_n$$
   Les inégalités précédentes montrent que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par a_1, elle est donc convergente. On note c sa limite. De même $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par c_1, elle est donc convergente. On note a sa limite.
   On va montrer maintenant $a = c$ par une double inégalité.
   Pour tous les entiers (plus grands que 1) p et q on peut écrire :
$$c_p \leq \cdots \leq c_{\max(p,q)} \leq a_{\max(p,q)} \leq \cdots \leq a_q$$
   On en déduit que pour tout $p \geq 1$, c_p est un minorant de l'ensemble des a_q donc $c_q \leq a$ car a est la borne inférieure de l'ensemble des a_q. Ceci montre que a est un majorant de l'ensemble des c_p donc $c \leq a$ car c est la borne supérieure de l'ensemble des c_n.
   Formons maintenant une inégalité ne contenant pas b_n dont la convergence n'est pas prouvée.
$$b_n \leq a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3} \leq \frac{2a_n+c_n}{3}$$
   Comme les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers a et c on peut utiliser le théorème de passage à la limite dans une inégalité. Il conduit à :
$$a \leq \frac{2a+c}{3} \Rightarrow a \leq c$$
   Il est alors évident, d'après le théorème d'encadrement, que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la limite commune $a = c$.

4. Le point essentiel dans les deux questions suivantes est la formule
$$a_{n+1}c_{n+1} = \frac{a_nb_nc_n(a_n+b_n+c_n)}{a_nb_n+b_nc_n+c_na_n} \qquad (1)$$
   a. En particulier, si $a_nc_n = b_n^2$, la formule devient
$$a_{n+1}c_{n+1} = \frac{b_n^3(a_n+b_n+c_n)}{a_nb_n+b_nc_n+b_n^2} = b_n^2$$
   Comme tout est positif, lorsque $a_1c_1 = b_1^2$ on obtient $a_2c_2 = b_1^2 = b_2^2$ et la relation se propage par récurrence, la suite des b_n est alors constante. Les trois suites convergent vers b_1 qui est la moyenne géométrique de a_1 et c_1.

   b. On va montrer que lorsque $a_1c_1 < b_1^2$, la suite des b_n est décroissante. Remarquons d'abord que
$$b_2^3 = a_1b_1c_1 < b_1^3$$
   ce qui entraine $b_2 < b_1$. Il s'agit donc de montrer que $a_nc_n < b_n^2$ pour tous les entiers n.
   La relation (1) peut encore s'écrire
$$a_{n+1}c_{n+1} = f(a_nc_n)$$
   avec
$$f : x \rightarrow \frac{ux}{x+v} \qquad u = b_n(a_n+b_n+c_n) \qquad v = a_nb_n + b_nc_n$$
   Comme
$$f(x) = u - \frac{uv}{x+v}$$
   et que tout est strictement positif, la fonction f est croissante.
   Alors :
$$a_nc_n < b_n^2 \Rightarrow a_{n+1}c_{n+1} = f(a_nc_n) < f(b_n^2) = b_n^2$$
   puis :
$$b_{n+1}^3 = a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1} < b_n^3 \Rightarrow b_{n+1} < b_n$$
   Le raisonnement est analogue lorsque $a_1c_1 > b_1^2$ et conduit à une suite décroissante.

Problème 1

Sous-groupes additifs de $(\mathbb{R},+)$

1. Le sous-groupe G n'est pas discret si et seulement si
$$\forall \alpha > 0,\ G\cap]0,\alpha[\neq \emptyset$$
Supposons que G ne soit pas discret. Considérons un réel x quelconque et un $\alpha > 0$. Il existe un élément $g \in G\cap]0,\alpha[$. Appelons n la partie entière de $\frac{x}{g}$. On a alors
$$ng \leq x < ng+g \qquad ng+g < ng+\alpha \leq x+\alpha$$
donc $(n+1)g \in G \cap\ ]x,x+\alpha[$ car G est stable.

2. a. Si x et y sont dans I (intervalle de longueur $\frac{\alpha}{2}$), alors :
$$|x-y| \leq \frac{\alpha}{2} < \alpha$$
En particulier, si x et y sont deux éléments distincts de $G \cap I$, un des deux réels $x-y$ ou $y-x$ est un élément de $G\cap]0,\alpha[$ ce qui est impossible.
Un intervalle quelconque de longueur finie est toujours inclus dans l'union d'un nombre fini d'intervalles de longueur $\frac{\alpha}{2}$. Chacun de ces (petits) intervalles ne peut contenir qu'au plus un élément de G. Par conséquent, l'intersection de G avec un tel intervalle (borné quelconque) est vide ou finie.

   b. Comme G n'est pas réduit à 0, il existe un g non nul dans G. Comme $-g \in G$ on peut supposer $g > 0$. Considérons alors l'ensemble $G \cap\ ]0,g]$.
Il est non vide (il contient g) et fini d'après la question précédente. Il admet donc un plus petit élément que l'on note m.
Montrons que $m = \min G \cap \mathbb{R}_+^*$.
On sait déjà que
$$m \in G \cap\ ]0,g] \subset \mathbb{R}_+^*$$
D'autre part, si $k \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ deux cas sont possibles
   - $k \leq g$ alors $k \in G\cap]0,g]$ donc $m \leq h$
   - $g < k$ alors $m < h$ car $m \leq g$.

   Ceci montre bien que m est un minorant de $G\cap]0,g]$ donc le plus petit élément de cet ensemble.

   c. D'après la définition d'un sous-groupe (stabilité) $\mathbb{Z}m \subset G$.
Réciproquement, soit $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. Notons k la partie entière de $\frac{g}{m}$. On a alors
$$k \leq \frac{g}{m} < k+1 \Rightarrow km \leq g < (k+1)m \Rightarrow 0 \leq g-km < m$$
À cause des propriétés de stabilité de G, on a $-km \in G$ et $g-km \in G \cap [0,m[$. D'apès la définition de m, il est impossible que $g-km \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. Ceci entraîne $g-km = 0$. C'est à dire $g = km$ donc $g \in \mathbb{Z}m$.

3. a. Vérification facile des propriétés de stabilité.

   b. Si S est discret, d'après la question 2., il existe $m > 0$ tel que $S = \mathbb{Z}m$.
Comme $x = 1\times x + 0 \times y \in S$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = pm$. De même, $y = 0\times 1 + 1 \times y \in S$ il existe donc $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $y = qm$. On en déduit
$$m = \frac{x}{p} = \frac{y}{q} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$
Réciproquement, si on suppose $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$,
$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \text{ tq } \frac{x}{y} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{p} = \frac{y}{q} \text{ (désigné par } m)$$
Alors $x = pm$ et $y = qm$ donc x et y sont dans $\mathbb{Z}m$ et
$$\big(\forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2,\ ix+jy = (ip+jq)m \in \mathbb{Z}m\big) \Rightarrow S \subset \mathbb{Z}m.$$
Ceci entraîne que $S\ \cap]0,m[$ est vide donc que S est discret.

4. a. Si $A \cap B$ était non vide, il existerait des entiers non nuls p et q tels que $px = qy$. On aurait alors
$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

   b. D'après 3., S est un sous-groupe qui n'est pas discret. Pour tout $\alpha > 0$, il existe donc des entiers m et n tels que $mx+ny \in]0,\alpha[$.
Lorsque $\alpha < \min(x,y)$, les entiers m et n sont tous les deux non nuls. Posons $a = mx$, $b = -ny$, alors $a \in A$ et $b \in B$ donc
$$\forall \alpha < \min(x,y),\ \inf\{|a-b|, (a,b) \in A\times B\} \leq \alpha$$
On en déduit que cette borne inférieure est nulle.

5. Considérons un intervalle quelconque $[u,v]$ dans $[-1,1]$, on doit montrer qu'il existe un entier n tel que $\cos n \in [u,v]$.
Posons $\alpha = \arccos v$, $\beta = \arccos u$ et formons l'intervalle $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$.
Comme 2π est irrationnel, le sous-groupe additif $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ engendré par 1 et 2π est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc des entiers m et n tels que $m+2\pi n \in [\alpha,\beta]$. On en déduit que $\cos m \in [u,v]$ ce qu'il fallait montrer.

Problème 2

1. Les calculs se font en transformant la fraction à intégrer pour se ramener à des fonctions dont on connait des primitives.

   a. Calcul de I_0.
$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$
   Calcul de I_1.
$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right] = \frac{\ln(2)}{2}$$
   Calcul de I_2.
$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$
   Calcul de I_3.
$$I_3 = \int_0^1 \frac{t^3+t-t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 t\,dt - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$$

   b. Calcul de K.
$$1-t+t^2 = (t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{1-t+t^2} = \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \Rightarrow$$
$$K = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$
   Calcul de L. On utilise l'identité remarquable $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$.
$$\frac{1+t+t^2}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{(1+t)+t^2}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{1}{1-t+t^2} + \frac{t^2}{1+t^3}$$
$$\Rightarrow L = K + \frac{1}{3}\left[\ln(1+t^3)\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln(2)}{3}$$

2. Multiplier par t^2+1 comme l'énoncé nous y invite fait apparaître une somme télescopique.
$$(t^2+1)\sum_{k=0}^{n-1}\left(t^{4k+i} - t^{4k+i+2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(t^{4k+i+2} - t^{4k+i+4} + t^{4k+i} - t^{4k+i+2}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(t^{4k+i} - t^{4(k+1)+i}\right) = t^i - t^{4n+i}$$

3. On intègre la relation trouvée à la question précédente après division par $1+t^2$. Par linéarité, on se ramène aux intégrales des fonctions puissances. On en déduit :
$$\int_0^1 \frac{t^i - t^{4n+i}}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \left(t^{4k+i} - t^{4k+i+2}\right)dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4k+i+1} - \frac{1}{4k+i+3}\right) = S_{i,n}$$

4. La convergence vers 0 résulte de l'encadrement
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^m}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{m+1}$$
   On en déduit
$$\forall i \in \{0,1,2,3\},\ (S_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^3} \longrightarrow I_i$$

5. a. Considérons $S_{1,n}$:
$$S_{1,n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)$$
   Il s'agit de la somme des inverses des nombres entre 1 et $2n$. Les impairs sont affectés de $+1$ et les pairs de -1 comme dans u_n. On en déduit
$$S_{1,n} = \frac{1}{2}u_n \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \longrightarrow 2I_1 = \ln(2)$$

b. Considérons $S_{0,n}$.

$$S_{0,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$$
$$= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+\frac{1}{4})(k+\frac{3}{4})} = \frac{v_n}{8} \Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \longrightarrow 8I_0 = 2\pi$$

6. a. Lorsque k décrit $\llbracket 0, 6n \llbracket$, la partie entiere $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ décrit $\llbracket 0, 2n \llbracket$.
On en déduit qu'il existe un k tel que $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = 2p$ si et seulement si $p \in \llbracket 0, n \llbracket$. On peut préciser

$$\forall p \in \llbracket 0, n \llbracket, \qquad \lfloor \frac{k}{3} \rfloor = 2p \Leftrightarrow k \in \{6p, 6p+1, 6p+2\}$$

b. À l'aide de la question précédente, on peut regrouper par 6 les termes de $F_n(t)$ de manière à prèciser la parité de $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$.

$$F_n(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \left(t^{6p} + t^{6p+1} + t^{6p+2} - t^{6p+3} - t^{6p+4} - t^{6p+5} \right)$$
$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left(1 + t + t^2 - t^3 - t^4 - t^5 \right) t^{6p}$$
$$= \left(1 + t + t^2 - t^3 - t^4 - t^5 \right) \frac{1-t^{6n}}{1-t^6}$$
$$= \left((1-t^3) + (t-t^4) + (t^2-t^5) \right) \frac{1-t^{6n}}{1-t^6}$$
$$= (1-t^3)(1+t+t^2)\frac{1-t^{6n}}{1-t^6} = (1+t+t^2)\frac{1-t^{6n}}{1+t^3}$$

c. On en déduit que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers L en utilisant un encadrement analogue à celui de la question 4

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^m}{1+t^3} dt \leq \int_0^1 t^m \, dt = \frac{1}{m+1}$$