Dans l'exercice 1, ne pas traiter les questions portant sur les interprétations physiques.

Exercice 1

On définit la *somme parallèle*[1] de deux réels strictement positifs par :

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ a//b = \frac{ab}{a+b}.$$

1. Cette opération est-elle commutative, associative, admet-elle un élément neutre ?
2. Soit x un réel quelconque. Montrer que

$$(a//b)x^2 = \inf\{ay^2 + bz^2, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y+z=x\}$$

   Cette borne inférieure est-elle un plus petit élément ?
   Si oui, pour quels couples (y_0, z_0) la relation $(a//b)x^2 = ay_0^2 + bz_0^2$ est-elle satisfaite ?
3. Interpréter physiquement les résultats de la question précédente en prenant pour y et z les intensités des courants électriques qui traversent des résistances a et b montées en parallèle.
4. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs et x un réel quelconque. Montrer que

$$(a//c)x^2 + (b//d)x^2 \leq ((a+b)//(c+d))x^2.$$

   Interpréter physiquement cette inégalité.
5. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i // \beta_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) // \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right).$$

Exercice 2

1. On considère trois nombres réels a, b, c quelconques.
   a. Montrer que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

   b. En déduire que, si a, b, c sont trois réels strictement positifs, ils vérifient

$$a+b+c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3(abc)^{-\frac{1}{3}}.$$

2. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminées par la donnée de leurs premiers termes $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$ et par les relations de récurrence

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \\ b_{n+1} = (a_n b_n c_n)^{1/3} \\ \dfrac{3}{c_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n}. \end{cases}$$

   Justifier que les suites sont bien définies et montrer que : $\forall n \geq 1, \quad c_n \leq b_n \leq a_n$.
3. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on dire de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. a. Montrer que $a_1 c_1 = b_1^2$ entraîne $a_n c_n = b_1^2$ pour tous les n. Que peut-on en conclure pour la limite des trois suites ?
   b. Montrer que si $a_1 c_1 \neq b_1^2$, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Problème 1

Un *sous groupe* (additif) de $(\mathbb{R},+)$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant 0 et stable pour l'addition et la symétrisation. Autrement dit, $G \subset \mathbb{R}$ est un sous-groupe si et seulement si

$$0 \in G, \quad \forall (x,y) \in G^2 : x+y \in G, \quad \forall x \in G : -x \in G$$

Cela entraîne en particulier que pour tout $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$, $ng \in G$ car il peut s'écrire comme une somme de x ou de $-x$.
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans B si et seulement si

$$\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0 :\ ]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\ \cap\ A \neq \emptyset$$

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, on dira que G est *discret* si et seulement si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } G \cap]0,\alpha[= \emptyset$$

L'objet de ce problème est d'étudier les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, G désigne un tel sous-groupe.

[1] d'après X 99 PC 1

1. Formuler une proposition traduisant que G n'est pas discret. Montrer que si G n'est pas discret alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0,\ G \cap [x, x+\alpha[\neq \emptyset$$
2. Dans cette question, on suppose que $G \neq \{0\}$ est discret. Il existe alors un réel α strictement positif tel que $G \cap]0, \alpha[= \emptyset$.
   a. Soit I un intervalle de longueur $\frac{\alpha}{2}$. Montrer que $G \cap I$ contient au plus un élément. Que peut-on en déduire pour l'intersection de G avec un intervalle quelconque de longueur finie ?
   b. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet un plus petit élément que l'on notera m.
   c. Montrer que $G = \{km, k \in \mathbb{Z}\}$. Un tel ensemble sera noté $\mathbb{Z}m$
3. Soit x et y deux réels strictement positifs, on pose
$$X = \mathbb{Z}x = \{kx, k \in \mathbb{Z}\},\ Y = \mathbb{Z}y = \{ky, k \in \mathbb{Z}\},\ S = \left\{mx + ny, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$
   a. Vérifier que X, Y et S sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. On dira que X est le sous-groupe *engendré* par x, que Y est le sous-groupe engendré par y et que S est le sous-groupe engendré par x et y.
   b. Montrer que S est discret si et seulement si $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.
4. Soit x et y deux réels strictement positifs, tels que $\frac{x}{y} \notin \mathbb{Q}$. Notons
$$A = \{kx, k \in \mathbb{Z}^*\}, \qquad B = \{ky, k \in \mathbb{Z}^*\}.$$
   a. Montrer que $A \cap B = \emptyset$.
   b. Montrer que
$$\inf \{|a - b|, (a, b) \in A \times B\} = 0.$$
5. En considérant un certain sous-groupe additif et en admettant que π est irrationnel, montrer que $\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Problème 2

L'objet de ce problème est de calculer la limite de certaines suites formées à partir de sommes d'inverses d'entiers affectés de signes[2].
Soit $i \in [\![0, 3]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
$$I_i = \int_0^1 \frac{t^i}{1+t^2}\, dt \qquad S_{i,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4k+i+1} - \frac{1}{4k+i+3} \right)$$

[2] D'après BECEAS 2016 [m16i21e]

1. Calcul d'intégrales.
   a. Calculer I_0, I_1, I_2, I_3.
   b. Calculer
$$K = \int_0^1 \frac{dt}{1-t+t^2}, \qquad L = \int_0^1 \frac{1+t+t^2}{1+t^3}\, dt$$
   Pour le calcul de L, il est utile de factoriser le dénominateur.
2. Soit $i \in [\![0, 3]\!]$, $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En multipliant par $t^2 + 1$, trouver une autre expression pour
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(t^{4k+i} - t^{4k+i+2}\right)$$
3. Soit $i \in [\![0, 3]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$S_{i,n} = \int_0^1 \frac{t^i - t^{4n+i}}{1+t^2}\, dt$$
4. Montrer que la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^m}{1+t^2}\, dt\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Que peut-on en déduire pour les suites $(S_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $i \in [\![0, 3]\!]$?
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$u_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p+1}}{p}, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+\frac{1}{4})(k+\frac{3}{4})}$$
   a. Exprimer u_n à l'aide d'un $S_{i,n}$ pour un certain i. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b. Exprimer v_n à l'aide d'un $S_{i,n}$ pour un certain i. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère
$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_n(t) = \sum_{k=0}^{6n-1} (-1)^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} t^k, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{6n-1} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor}}{k+1}$$
   a. Quel est l'ensemble des $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ pour $k \in [\![0, 6n[\![$? Quels sont les entiers p pour lesquels il existe des $k \in [\![0, 6n[\![$ vérifiant $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = 2p$? Pour un tel p, préciser ces entiers k.
   b. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_n(t) = \frac{1+t+t^2}{1+t^3}(1 - t^{6n})$$
   c. Montrer la convergence et préciser la limite de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.