Exercice 1

Dans cet exercice G désigne un groupe dont l'opération est notée multiplicativement : pour tous a et b de G le produit de a par b est simplement noté ab. On ne suppose pas que le groupe soit commutatif.
Pour une partie A de G, on appelle *centralisateur* de A la partie $\mathcal{C}(A)$ de G définie par :

$$\forall x \in G,\ (x \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \forall a \in A, ax = xa)\,.$$

Dans la suite de l'exercice, quand on demande de comparer deux parties de G, il s'agit de prouver une inclusion entre ces deux parties.
La partie A de G est fixée pour la suite de l'exercice.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-groupe de G.
2. Soit X et Y deux parties de G telles que $X \subset Y$. Comparer $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(Y)$.
3. Soit X une partie quelconque de G, comparer X et $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$.
4. Montrer que
$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))) = \mathcal{C}(A)$$

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. Tous les développements limités demandés sont en 0.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 2 de
$$t \mapsto \frac{1}{1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}}.$$
2. Calculer un développement limité à l'ordre $n+3$ de
$$t \mapsto \ln\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right).$$
On pourra considérer la dérivée de cette fonction.

Problème

L'objectif de cette partie est de montrer l'irrationalité de e^r pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

Par définition de la fonction exponentielle, le nombre e est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On définit aussi, pour tout$n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions polynomiales U_n et L_n et T_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U_n(x) = \frac{1}{n!}\, x^n(1-x)^n,\ L_n = U_n^{(n)}.$$

On définit enfin la fonction T_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(x) = \int_0^1 L_n(t)\, e^{xt}\, dt.$$

Partie I. Résultats préliminaires.

1. a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite nulle. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
   b. Soit λ réel non nul. Montrer que $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
2. Valeurs prises par les dérivées successives d'une fonction polynomiale.
   a. Montrer que
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0.$$
   b. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer $U_n^{(n+k)}(0)$ et $U_n^{(n+k)}(1)$ en fonction de n et k. Vérifier que ces nombres sont des entiers.
   On pourra utiliser la formule de Leibniz et préciser les termes contribuant réellement aux sommes obtenues.
3. Formule d'intégration par parties itérée.
   Soit a et b réels tels que $a < b$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer
   $$\int_a^b f^{(p)}(t)g(t)\, dt = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \left[f^{(p-k)} g^{(k-1)}\right]_a^b + (-1)^p \int_a^b f(t)g^{(p)}(t)\, dt.$$
4. Un critère d'irrationalité.
   Soit $\omega > 0$. On pose
   $$\mathbb{Z}\omega = \{k\omega, k \in \mathbb{Z}\}\,,\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega = \left\{k + k'\omega, (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$
   a. On suppose qu'il existe $a > 0$ réel tel que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega = \mathbb{Z}a$. Montrer que $\omega \in \mathbb{Q}$ (ω est rationnel).

Rémy Nicolai S1805E

b. On suppose $\omega \in \mathbb{Q}$ avec p et q naturels non nuls, premiers entre eux tels que $\omega = \frac{p}{q}$. On pose enfin $a = \frac{1}{q}$.
   i. Montrer que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega \subset \mathbb{Z}a$.
   ii. Montrer que $\mathbb{Z}a \ \subset Z + \mathbb{Z}\omega$. On admettra l'existence de deux entiers u et v tels que $up + vq = 1$.

5. Une condition suffisante d'irrationalité.
   a. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de nombres entiers dont la limite est nulle. Montrer
   $$\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N,\ k_n = 0.$$
   b. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres entiers tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n\omega - p_n \neq 0.$$
   Montrer que si la suite $(q_n\omega - p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, alors le nombre ω est irrationnel.

Partie II. Irrationalités

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Justifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < e < v_n.$$
2. Vérifier que $(n!\,u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres entiers puis montrer que e est irrationnel.
3. Préciser les degrés des fonctions polynomiales U_n et L_n.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$.
   a. Montrer que
   $$T_n(x) = (-x)^n \int_0^1 U_n(t)\, e^{xt}\, dt \qquad \text{et} \qquad T_n(x) \neq 0.$$
   b. En majorant $t(1-t)$ pour $t \in [0,1]$, montrer que
   $$|x^n\, T_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{4^n\, n!} \max(1, e^x).$$
   c. Montrer que la suite $(x^n T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
5. Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, on pose $\psi_x(t) = e^{xt}$.
   a. Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^{n+1}\, T_n(x) = (-1)^n \int_0^1 \psi_x^{(2n+1)}(t) U_n(t)\, dt.$$
   b. Montrer qu'il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n, à coefficients entiers et de degré n, telles que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^{n+1} T_n(x) = Q_n(x)e^x - P_n(x).$$
6. Montrer l'irrationalité de e^r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ puis pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$. Montrer que $\ln\alpha$ est irrationnel pour $\alpha > 0$ rationnel et différent de 1.