Exercice 1

1. Les pôles de F sont les racines n-ièmes de 1. Comme la fraction est de degré strictement négatif, il n'y a pas de partie entière. La fraction est la somme de ses parties polaires.
2. Le développement limité de x^k en 1 est
$$x^k = 1 + k(x-1) + o(x-1)$$
En sommant les développements précédents, la somme des entiers consécutifs apparait et il vient :
$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = n + \frac{n(n-1)}{2}(x-1) + o(x-1)$$
On factorise par n pour se ramener à un développement usuel
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x+\cdots+x^{n-1})^2} &= \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{n-1}{2}(x-1) + o(x-1)\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{n-1}{n^2}(x-1) + o(x-1)\end{aligned}$$
3. Soit $u \in \mathbb{U}$. Si on substitue uX à X dans F, la fraction est conservée. La partie polaire relative au pôle u devient
$$\frac{\alpha(u)}{(uX-u)^2} + \frac{\beta(u)}{uX-u} = \frac{\alpha(u)}{u^2(X-1)^2} + \frac{\beta(u)}{u(X-1)}$$
qui est la partie polaire relative à 1. On en déduit
$$\alpha(u) = u^2\alpha(1), \qquad \beta(u) = u\beta(1)$$
4. a. Par définition d'une partie polaire,
$$F = \frac{\alpha(1)}{(X-1)^2} + \frac{\beta(1)}{X-1} + R$$
où R est une fraction qui n'admet pas de pôle en 1. Comme
$$X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$$
En multipliant F par $(X-1)^2$, on obtient
$$\frac{1}{(1+X+\cdots+X^{n-1})^2} = \alpha(1) + \beta(1)(X-1) + (X-1)^2R$$
Comme 1 n'est pas un pôle de R, la fonction attachée à R admet une limite finie en 1 dont la fonction attachée à$(X-1)^2R$ est négligeable en 1 devant $x-1$. L'écriture proposée est donc bien un développement limité en 1.

   b. En identifiant les développements limités obtenus en 2. et 4.a., on obtient
$$\alpha(1) = \frac{1}{n^2}, \qquad \beta(1) = -\frac{n-1}{n^2}$$
puis la décomposition en éléments simples
$$F = \frac{1}{n^2}\sum_{u\in\mathbb{U}}\frac{u^2}{(X-u)^2} - \frac{n-1}{n^2}\sum_{u\in\mathbb{U}}\frac{u}{X-u}$$
5. a. Si $1 \leq k \leq n-1$ et $k' = n-k$, alors $1 \leq k' \leq n-1$ et $\overline{w^k} = w^{k'}$.

   b. On regroupe les racines conjuguées. Dans le cas pair deux racines sont réelles (1 et -1) dans le cas impair 1 est la seule racine.
$$n = 2p \qquad X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1\right)$$
$$n = 2p+1 \qquad X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1\right)$$
   c. Pour un pôle $u = e^{i\theta}$ non réel,
$$\frac{u^2}{(X-u)^2} = \frac{u^2(X^2 - 2\overline{u}X + \overline{u}^2)}{(X^2 - 2\cos\theta X + 1)^2} = \frac{u^2X^2 - 2uX + 1}{(X^2 - 2\cos\theta X + 1)^2}$$
Les éléments simples relatifs à deux pôles conjugués sont eux mêmes conjugués. Les regrouper revient à prendre deux fois la partie réelle. Soit :
$$\begin{aligned}&2\frac{\cos 2\theta X^2 - 2\cos\theta X + 1}{(X^2 - 2\cos\theta X + 1)^2} \\ &\qquad = \frac{2\cos 2\theta}{X^2 - 2\cos\theta X + 1} + 4\sin^2\theta\frac{-2\cos\theta X + 1}{(X^2 - 2\cos\theta X + 1)^2}\end{aligned}$$
Pour le résidu,
$$\frac{u}{X-u} = \frac{u(X-\overline{u})}{X^2 - 2\cos\theta X + 1} = \frac{uX - 1}{X^2 - 2\cos\theta X + 1}$$

Le double de la partie réelle est

$$2\frac{\cos\theta X - 1}{X^2 - 2\cos\theta X + 1}$$

On en déduit la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$. On pose $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$.
Dans le cas impair $n = 2p+1$:

$$\begin{aligned}F = &\frac{1}{n^2}\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{n-1}{n^2}\frac{1}{X-1}\\ &+ \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\sin^2\theta_k \frac{-2\cos\theta_k X + 1}{(X^2-2\cos\theta_k X+1)^2}\\ &+ \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{(n-1)\cos\theta_k X + n - 1 + \cos 2\theta_k}{X^2 - 2\cos\theta_k X + 1}\end{aligned}$$

Dans le cas pair $n = 2p$:

$$\begin{aligned}F = &\frac{1}{n^2}\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{n-1}{n^2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{n^2}\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{n-1}{n^2}\frac{1}{X+1}\\ &+ \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{p-1}\sin^2\theta_k \frac{-2\cos\theta_k X + 1}{(X^2-2\cos\theta_k X+1)^2}\\ &+ \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(n-1)\cos\theta_k X + n - 1 + \cos 2\theta_k}{X^2 - 2\cos\theta_k X + 1}\end{aligned}$$

Exercice 2

1. a. En écrivant les deux termes de plus haut degré de la formule du binôme, on montre que Q_n est de degré n et de coefficient dominant $n+1$.

   b. En substituant $-X$ à X dans Q_n on obtient $(-1)^n Q_n$. On en déduit que Q_n est de même parité que n et que l'ensemble des racines de Q_n est symétrique (si z est racine alors $-z$ l'est aussi).

2. Écrivons cette fois la formule complète :

$$Q_{2r} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2r+1}\binom{2r+1}{k}\left(1-(-1)^k\right)(i)^k X^{2r+1-k}$$

De plus $1-(-1)^k$ est nul si k est pair, il vaut 2 si k est impair. Les entiers impairs k entre 1 et $2r+1$ sont de la forme $2p+1$ avec $p \in \{0,\dots,r\}$. Alors $i^k = (-1)^p i$ d'où

$$Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r}\binom{2r+1}{2p+1}(-1)^p X^{2(r-p)}$$

On retrouve bien le fait que Q_{2r} est pair. Il est clair que

$$S_r = \sum_{p=0}^{r}\binom{2r+1}{2p+1}(-1)^p X^{r-p}$$

3. Les racines de Q_n sont les complexes z tels que

$$(z+i)^{n+1} = (z-i)^{n+1}$$

Comme i n'est pas solution de cette équation, celle ci est équivalente à

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_{n+1}$$

On en déduit que z est une racine si et seulement si il existe k entre 1 et n tel que

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$$

Il faut exclure $k=0$ car $\frac{z+i}{z-i}$ est toujours différent de 1.
En transformant la relation (homographique) précédente, on obtient que z est racine si et seulement si il existe k entre 1 et n tel que

$$z = -i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}} = -i\frac{2\cos\frac{k\pi}{n+1}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n+1}} = \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n+1}$$

Ces racines sont distinctes car l'application[1]

$$z \to \frac{z+i}{z-i}$$

est bijective de $\mathbb{C}-\{i\}$ dans $\mathbb{C}-\{1\}$.
En tenant compte du coefficient dominant, l'expression des racines conduit à la factorisation

$$Q_n = (n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

[1] une telle application est dite homographiqe

4. Lorsque $k \in [\![1, r]\!]$, l'entier $2r+1-k$ décrit $]\!]r+1, 2r]\!]$ avec
$$\operatorname{cotan} \frac{(2r+1-k)\pi}{2r+1} = \operatorname{cotan}(\pi - \frac{k\pi}{2r+1}) = -\operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2r+1}$$
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on regroupe les racines opposées associées à k et à $2r+1-k$. On obtient
$$Q_{2r} = (2r+1) \prod_{k=1}^{r} \left(X^2 - \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2r+1} \right)$$
En développant ce produit, il apparait que le coefficient du terme de degré $2r-2$ de Q_{2r} est
$$-(2r+1) \sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2r+1}$$
d'autre part, d'après 1. ce coefficient est aussi
$$-\binom{2r+1}{3} = -\frac{(2r+1)(2r)(2r-1)}{6}$$
On en déduit
$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$$
En remplaçant cotan^2 par $\frac{1}{\sin^2} - 1$ dans la formule précédente, il vient
$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = r + \frac{r(2r-1)}{3} = \frac{2r(r+1)}{3}$$

5. Dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sin et cotan sont strictement positifs. Les inégalités demandées se déduisent donc de $\sin x < x < \tan x$. Celles ci se démontrent très rapidement en formant les tableaux de variation de $x - \sin x$ et de $\tan x - x$.

6. Écrivons les inégalités de la question précédente avec $x = \frac{k\pi}{2r+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour tous les $k \in [\![1, r[\![$ et additionnons les en tenant compte de 4. :
$$\frac{r(2r-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2} \leq \frac{2r(r+1)}{3}$$

7. L'encadrement précédent s'écrit encore
$$\left(\frac{\pi}{2r+1}\right)^2 \frac{r(2r-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} \leq \left(\frac{\pi}{2r+1}\right)^2 \frac{2r(r+1)}{3}$$
$$\frac{\pi^2}{3} \frac{r(2r-1)}{(2r+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2\pi^2}{3} \frac{r(r+1)}{(2r+1)^2}$$
Quand $r \to +\infty$, les suites à droite et à gauche convergent vers $\frac{\pi^2}{6}$. On en déduit
$$\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}\right)_{r \in \mathbf{N}} \to \frac{\pi^2}{6}$$

Problème

Partie I. Intégrale de Nair

1. On utilise la formule du binôme et la linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} I(m,n) &= \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} \int_0^1 x^{m-1}(-1)^j x^j \, dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} (-1)^j \left[\frac{x^{m+j}}{m+j}\right]_0^1 = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} \frac{(-1)^j}{m+j} \end{aligned}$$

2. On effectue une intégration par parties
$$I(m,n) = \left[\frac{1}{m} x^m (1-x)^{n-m}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{m} x^m (-1)(n-m)(1-x)^{n-m-1} \, dx$$
Le crochet est nul car $0 < m < n$. On obtient donc
$$I(m,n) = \frac{n-m}{m} I(m+1, n)$$
a. On peut directement calculer
$$I(1,n) = \int_0^1 (1-x)^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}$$

b. Pour $m = 1$:
$$m\binom{n}{m}I(m,n) = 1\binom{n}{1}I(1,n) = n\frac{1}{n} = 1$$
On peut continuer par récurrence jusqu'à $m = n$ car :
$$\begin{aligned}(m+1)\binom{n}{m+1}I(m+1,n) &= (m+1)\frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{(m+1)!}\frac{m}{n-m}I(m,n)\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}mI(m,n) = m\binom{n}{m}I(m,n)\end{aligned}$$

3. a. Par linéarité, une formule du binôme apparait dans la somme proposée
$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}I(m,n)y^{m-1}\\ &= \int_0^1\left(\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}(xy)^{m-1}(1-x)^{n-1-(m-1)}\right)dx\\ &= \int_0^1(1-x+xy)^{n-1}\,dx = \int_0^1(1+(y-1)x)^{n-1}\,dx\\ &= \frac{1}{n(y-1)}\left[(1+(y-1)x)^n\right]_0^1 = \frac{1}{n(y-1)}(y^n-1)\frac{1}{n}\left(1+y+\cdots+y^{n-1}\right)\end{aligned}$$

b. Comme la relation est valable pour une infinité de y (tous les éléments de l'intervalle), on peut déduire une égalité entre les polynômes associés ce qui permet d'identifier les coefficients des puissances de y. On retrouve la formule déjà obtenue.

Partie II. Plus petit commun multiple des premiers entiers

1. On présente dans un tableau les valeurs des premiers d_n.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
d_n	2	6	12	60	60	420	840	2520

2. a. D'après I.1. :
$$d_nI(m,n) = \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{n-m}{k-m}\underbrace{\frac{d_n}{k}}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

b. En multipliant I.2.c. par d_n :
$$\underbrace{m\binom{n}{m}}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{d_nI(m,n)}_{\in\mathbb{Z}} = d_n$$
donc $m\binom{n}{m}$ divise d_n.

3. – Cas 1. $x = m\binom{2m}{m}$.
De II.2.b avec $n = 2m$, on déduit que x divise d_{2m} donc d_{2m+1} car d_{2m} divise d_{2m+1}.
– Cas 2. $x = (m+1)\binom{2m+1}{m+1}$.
De II.2.b avec $2m+1$ dans le rôle de n et $m+1$ dans celui de m, on déduit que x divise d_{2m+1}.
– Cas 3. $x = (2m+1)\binom{2m}{m}$.
D'après la définition des coefficients du binôme : $x = (m+1)\binom{2m+1}{m+1}$. On se retrouve dans le cas précédent.
– Cas 4. $x = m(2m+1)\binom{2m}{m}$.
D'après les cas 1. et 3., d_{2m+1} est un multiple de $m\binom{2m}{m}$ et $(2m+1)\binom{2m}{m}$ donc c'est un multiple de leur ppcm. Montrons que ce ppcm est x ce qui assure que x divise d_{2m+1}.
Notons $u \vee v$ le ppcm de deux entiers u et v et utilisons des propriétés du ppcm :
$$\begin{aligned}\left(m\binom{2m}{m}\right)\vee\left((2m+1)\binom{2m}{m}\right) &= \binom{2m}{m}(m\vee(2m+1))\\ &= \binom{2m}{m}m(2m+1) = x\end{aligned}$$
car m et $2m+1$ sont premiers entre eux.

4. D'après la formule du binôme :
$$2^{2m} = (1+1)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}$$
Il est clair que $\binom{2m}{m}$ est le plus grand des $2m+1$ coefficients du binôme de ce développement donc
$$2^{2m} \leq (2m+1)\binom{2m}{m} \leq \frac{1}{m}m(2m+1)\binom{2m}{m} \leq \frac{d_{2m+1}}{m}$$
car $m(2m+1)\binom{2m}{m}$ est inférieur à d_{2m+1} car il le divise. On en déduit
$$m2^{2m} \leq d_{2m+1}.$$

Partie III. Inégalité de Chebychev

1. a. Lorsque n est impair, on l'écrit $n = 2m+1$.
Alors II.4. entraine $m\,2^{2m} \leq d_{2m+1}$. Si $n \geq 9$, alors $m \geq 4$ et

$$2^n = 2 \times 2^{2m} \leq 4 \times 2^{2m} \leq m\,2^{2m} \leq d_{2m+1} = d_n$$

Pour n pair avec $n \geq 10$, on a $n = 2(m+1)$ avec $m \geq 4$ donc :

$$2^n = 4 \times 2^{2m} \leq m\,2^{2m} \leq d_{2m+1} \leq d_{2m+2} = d_n$$

b. On forme le tableau des premières valeurs de d_n et 2^n.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	4	8	16	32	24	128	256	512
d_n	2	6	12	60	60	420	840	2520

L'inégalité $2^n \leq d_n$ est donc vraie pour tous les entiers sauf 1, 2, 3, 4.

2. a. Notons $v_p(m)$ la p-valuation d'un entier m c'est à dire l'exposant de p dans la décomposition de m en facteurs premiers. Alors :

$$\alpha_p = v_p(d_n) = \max\left(v_p(2)\, v_p(3), \cdots, v_p(n)\right)$$

car d_n est le pgcd des entiers de 1 à n. Il existe donc un $m_p \leq n$ qui réalise ce plus grand élément c'est à dire tel que

$$\alpha_p = v_p(m_p)$$

b. La décomposition de d_n s'écrit

$$d_n = \prod_p p^{\alpha_p}$$

ce produit étant étendu à tous les p premiers inférieurs ou égaux à n.
Chaque p^{α_p} est la composante en p dans la décomposition d'un m_p donc

$$p^{\alpha_p} \leq m_p \leq n \Rightarrow d_n \leq n^{\pi(n)}$$

car $\pi(n)$ est le nombre d'entiers premiers plus petits ou égaux à n.

3. a. Pour $n \geq 9$, on a vu que $2^n \leq d_n$. Donc

$$2^n \leq n^{\pi(n)} = e^{\pi(n)\ln n}$$

en prenant le logarithme :

$$n \ln 2 \leq \pi(n) \ln n \Rightarrow \pi(n) \geq \ln 2\, \frac{n}{\ln n}$$

b. On examine les cas particuliers en présentant les approximations numériques dans un tableau

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4
$\ln 2\, \frac{n}{\ln n}$	2	1.89	2	2.15	2.32	2.49	2.66	2.83

On en déduit que l'inégalité $\pi(n) \geq \ln 2\, \frac{n}{\ln n}$ est valable pour tous les $n \geq 4$.