Exercice 1

Soit n un entier non nul. On se propose de décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{(X^n - 1)^2}$$

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des racines nièmes de 1.

1. Préciser les pôles de F. La partie polaire de F relative au pôle u est notée
$$\frac{\alpha(u)}{(X-u)^2} + \frac{\beta(u)}{X-u}$$
Avec ces notations, comment s'écrit la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$?
2. Soit k un entier entre 1 et n. Former des développements limités à l'ordre 1 en 1 des fonctions suivantes
$$x^k, \qquad 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}, \qquad \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)^{-2}$$
3. Pour un pôle u autre que 1, exprimer $\alpha(u)$ en fonction de u et $\alpha(1)$, exprimer $\beta(u)$ en fonction de u et $\beta(1)$.
4. a. Montrer que, au voisinage de 1,
$$\frac{1}{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})^2} = \alpha(1) + \beta(1)(x-1) + o(x-1)$$
En déduire la partie polaire de F relative au pôle 1.
   b. Former la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.
5. On note $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   a. Soit $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, préciser $k' \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ tel que
$$\overline{w^k} = w^{k'}$$
   b. En distinguant les cas n pair et n impair, factoriser $X^n - 1$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
   c. En distinguant les cas n pair et n impair, décomposer F en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme Q_n à coefficient complexes par[1] :

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right)$$

1. a. Déterminer le degré de Q_n et son coefficient dominant.
   b. Quel est le polynôme obtenu en substituant $-X$ à X dans Q_n ?
   Que peut-on en déduire pour l'ensemble des racines de Q_n ?
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, r]\!]$. Préciser le coefficient de X^{2r-2p} dans Q_{2r} puis $S_r \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$Q_{2r} = \widehat{S_r}(X^2)$$
Le chapeau traduit la substitution de X par X^2 dans S_r.
3. En faisant intervenir l'ensemble $\mathbb{U}_{n+1}$ des racines $n+1$-ièmes de l'unité, déterminer les racines complexes de Q_n. En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver les égalités suivantes :
$$\sum_{k=1}^{r}\left(\text{cotan}\,\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2 = \frac{r(2r-1)}{3}, \qquad \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\left(\sin\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2} = \frac{2r(r+1)}{3}$$
5. Établir les inégalités
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: \quad (\text{cotan}\,x)^2 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{(\sin x)^2}$$
6. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente un encadrement de
$$\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$$
7. Pour tout entier naturel non nul n, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$
Montrer la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.

[1] pour les origines de cette idée, voir le chapitre de *Raisonnements divins* de M. Aigner et G.M. Ziegler (Springer)

Rémy Nicolai S1806E

Problème

L'objet de ce problème[2] est de prouver une inégalité de Chebychev portant sur le nombre (noté $\pi(n)$) d'entiers premiers plus petits qu'un entier n.

Partie I. Intégrale de Nair

Pour tous entiers naturels non nuls m et n tels que $m \leq n$, on pose

$$I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx$$

1. Montrer que
$$I(m,n) = \sum_{j=0}^{n-m} \frac{(-1)^j}{m+j}\binom{n-m}{j}$$

2. a. Soit $m < n$, montrer que
$$mI(m,n) = (n-m)I(m+1,n)$$
   b. Calculer $I(1,n)$.
   c. Montrer que
$$m\binom{n}{m}I(m,n) = 1$$

3. Dans cette question, on veut retrouver *de manière indépendante* le résultat de la question 2.c.
   a. Montrer que, pour tout $y \in [0,1[$,
$$\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}I(m,n)y^{m-1} = \frac{1}{n}\left(1+y+\cdots+y^{n-1}\right)$$
   b. En déduire le résultat cherché.

[2] d'après *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* G. Tenenbaum (Pub. Institut Elie Cartan) p11 et *On Chebyschev-type inequalities for prime* M. Nair (Am. Math. Month. 89, no 2, 126-129)

Partie II. Plus petit commun multiple des premiers entiers

Pour tout nombre naturel non nul n, on note d_n le plus petit des multiples communs à tous les entiers entre 1 et n.

1. Calculer d_n pour n entre 1 et 9.
2. Soit m et n des entiers tels que $m \leq n$.
   a. Montrer que $d_n I(m,n) \in \mathbb{Z}$.
   b. Montrer que $m\binom{n}{m}$ divise d_n.
3. Soit m un entier naturel non nul, montrer que chacun des nombres suivants
$$m\binom{2m}{m}, \quad (m+1)\binom{2m+1}{m+1}, \quad (2m+1)\binom{2m}{m}, \quad m(2m+1)\binom{2m}{m}$$
divise d_{2m+1}.
4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, en considérant $(1+1)^{2m}$, montrer que $m\,2^{2m} \leq d_{2m+1}$

Partie III. Une inégalité de Chebychev

1. a. En distinguant les cas où n est pair ou impair, montrer que $d_n \geq 2^n$ pour tous les entiers n tels que $n \geq 9$.
   b. Déterminer tous les entiers n pour lesquels $d_n \geq 2^n$.
2. a. Soit n un naturel non nul et p un diviseur premier de d_n. L'exposant de p dans la décomposition de d_n en facteurs premiers est noté α_p. Montrer qu'il existe un entier m_p compris entre 1 et n tel que α_p soit l'exposant de p dans la décomposition de m_p en facteurs premiers.
   b. Montrer que $d_n \leq n^{\pi(n)}$.
3. a. Montrer que, pour tous les entiers $n \geq 9$,
$$\pi(n) \geq \ln 2 \frac{n}{\ln n}$$
   b. Déterminer tous les entiers n pour lesquels l'inégalité précédente est vraie.