Exercice 1

1. On demande ici de montrer que certaines familles sont des bases et de préciser les matrices de passage à partir d'une base fixée. Les vecteurs de ces familles (les a_i) sont donnés comme des combinaisons linéaires des vecteurs d'une base fixe (les e_j). Le plus économique est d'exprimer les e_j en fonction des a_i. Cela montre que la famille des a_i est génératrice (donc que c'est une base à cause du nombre d'éléments) et donne aussi la matrice de passage.
   Preuve que $\mathcal{A}$ est une base, calcul de $P_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$.
   On transforme par opérations élémentaires le système de relations définissant (a_1, a_2, a_3)
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1 &=& e_1+e_2+e_3 \\ a_2 &=& e_1+e_3 \\ a_3 &=& -e_1+e_2+2e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} e_1 &=& \frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2-\frac{1}{3}a_3 \\ e_2 &=& a_1-a_2 \\ e_3 &=& -\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+\frac{1}{3}a_3 \end{array}\right.$$
   On en déduit :
$$P_{\mathcal{E}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A}\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Preuve que $\mathcal{A}_1$ est une base, calcul de $P_{\mathcal{A}_1\mathcal{E}}$.
   Exprimons (e_1, e_2, e_3) en fonction de (e_1, a_2, a_3)
$$\begin{cases} a_1 = e_1+e_2+e_3 \\ a_2 = e_1+e_3 \\ a_3 = -e_1+e_2+2e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = e_1 \\ e_3 = -e_1+a_2 \\ e_2 = e_1+a_3-2e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = e_1 \\ e_2 = 3e_1-2a_3+a_3 \\ e_3 = -e_1+a_2 \end{cases}$$
$$P_{\mathcal{A}_1\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Preuve que $\mathcal{A}_2$ est une base, calcul de $P_{\mathcal{A}_2\mathcal{E}}$.
   Exprimons (e_1, e_2, e_3) en fonction de (a_1, e_2, a_3). On utilise l'expression des e_j en fonction des a_i. De $e_2 = a_1 - a_2$ on tire $a_2 = a_1 - e_2$ que l'on remplace dans les deux autres relations. On obtient :
$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 &=& \frac{2}{3}a_1-\frac{1}{3}e_2-\frac{1}{3}a_3 \\ e_2 &=& e_2 \\ e_3 &=& \frac{1}{3}a_1-\frac{2}{3}e_2+\frac{1}{3}a_3 \end{array}\right., \qquad P_{\mathcal{A}_2\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On rappelle que p_1 est le projecteur sur $\operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ parallélement à $\operatorname{Vect}(e_1)$.
   - Calcul de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} p_1$. Par définition :
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Calcul de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{A}} p_1$. On utilise la formule de changement de base avec les matrices de passage déjà trouvées
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{A}} p_1 = P_{\mathcal{A}\mathcal{E}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} p_1 P_{\mathcal{E}\mathcal{A}}$$
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{A}} p_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   - Calcul de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{A}} p_1$. Par définition, $p_1(e_1) = 0$, $p_1(e_2) = e_2$, $p_1(e_3) = e_3$. On peut exprimer ces vecteurs dans $\mathcal{A}$ avec les calculs déjà faits. On obtient
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{A}} p_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Calcul de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} p_1$. De $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$ on déduit $p_1(a_1) = e_2 + e_3$. De même les autres colonnes s'obtiennent directement à partir des expressions des a_i en fonction des e_j.
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On rappelle que p_2 est le projecteur sur $\operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(a_1)$.
   - Calcul de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} p_2$. À partir de la définition de $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$, il vient $p_2(e_1) = -e_2 - e_3$. On en déduit
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Calcul de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{A}} p_2$. Il faut exprimer a_1, a_2, a_3 en fonction de a_1, e_2, e_3. En partant des définitions de a_1, a_2, a_3, on obtient :
$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 - e_2 \\ a_3 = -a_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2(a_1) = 0 \\ p_2(a_2) = -e_2 = -a_1 + a_2 \\ p_2(a_3) = 2e_2 + 3e_3 = a_1 + a_3 \end{cases}$$

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}} p_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Calcul de $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{A}} p_2$. On exprime $p_2(e_2) = e_2$ et $p_2(e3) = e_3$ dans $\mathcal{A}$. De plus,

$$e_1 = a_1 - e_2 - e_3 \Rightarrow p_2(e_1) = -e_2 - e_3 = -\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_3$$

d'où

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{A}} p_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Calcul de $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} p_2$. On exprime a_1, a_2, a_3 en fonction de a_1, e_2, e_3. On obtient :

$$\begin{cases} a_2 = a_1 - e_2 \\ a_3 = -a_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases} \Rightarrow \operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problème

Partie I. Exemple.

1. Par définition, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injective ce qui est équivalent à $\operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) < 3$. La discussion du rang permet de former des polynômes dont les racines sont les valeurs propres. On transforme les matrices par opérations élémentaires.

$$A - \lambda I_3 \xrightarrow{\text{mult } -1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & 1 \\ 2+\lambda & \lambda & 1 \\ 2+\lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}} \begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ spectre de } a = \{-2, 1\}$$

$$B - \lambda I_3 \xrightarrow{\text{perm } L_1 L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 6-3\lambda & -4+4\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda-2)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ spectre de } b = \{2\}$$

2. Le calcul matriciel conduit à $AU_1 = U_1$, $AU_2 = U_2$, $AU_3 = -2U_3$. On en déduit que les trois vecteurs de $\mathcal{F}$ sont propres pour a avec $a(u_1) = u_1$, $a(u_2) = u_2$, $a(u_3) = -2u_3$. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base, on montre qu'elle est génératrice en prouvant que le rang de la matrice de (u_3, u_2, u_1) dans $\mathcal{E}$ est 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} = 3$$

Aucun de ces vecteurs n'est propre pour b car

$$BU_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Vect}(U_1),\ BU_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Vect}(U_2),\ BU_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Vect}(U_3)$$

3. On forme la matrice de $b - 2\operatorname{Id}_E$ dans la base $\mathcal{E}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Il apparait clairement que la famille constituée de la première colonne est une base l'espace vectoriel engendré par les trois colonnes. Cette première colonne est la matrice de u_4 dans $\mathcal{E}$. On en déduit que $\operatorname{Im}(b - 2\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}(u_4)$. Le théorème du rang entraine que $\dim(\ker(b - 2\operatorname{Id}_E)) = 2$.
On remarque sur la matrice que la ligne 1 engendre l'espace des lignes. On en déduit que cette ligne seule forme une équation du noyau. Un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{E}$ est dans $\ker(b - 2\operatorname{Id}_E)$ si et seulement si $x - 3y - 1 = 0$.

4. Formons les équations caractérisant qu'un vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{E}$ est dans $\ker(a - \operatorname{Id}_E) \cap \ker(b - 2\operatorname{Id}_E)$; certaines de ces équations se répètent. Il reste :
$$\begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$
On en déduit que $u \in \ker(a - \operatorname{Id}_E) \cap \ker(b - 2\operatorname{Id}_E)$ si et seulement si $u \in \operatorname{Vect}(u_5)$ de la forme $u = y(e_1 + e_2 - 2e_3) = yu_5$.
Tous les vecteurs non nuls de $\operatorname{Vect}(u_5)$ sont des vecteurs propres communs aux endomorphismes a et b.
Comme le spectre de b se réduit à 2, les seuls autres vecteurs propres possibles sont dans $\ker(a + 2\operatorname{Id}_E) \cap \ker(b - 2\operatorname{Id}_E)$. Un vecteur u de coordonnées (x, y, z) est dans cette intersection si et seulement si
$$\begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 5y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$
Il n'y a donc pas d'autres vecteurs propres communs.

Partie II. Exemple avec des polynômes.

1. a. Les définitions des endomorphismes a et b conduisent aux matrices suivantes dans la base canonique $(1, X, X^2)$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   b. En calculant, il vient
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A, B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A^2, B] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
   On lit clairement sur leurs colonnes que $[A, B]$ et $[A^2, B]$ sont de rang 2.
2. Valeurs et vecteurs propres de a.
   a. Soit λ une valeur propre de a. Il existe alors un polynôme P non nul tel que $P' = \lambda P$. À cause du degré, cela n'est possible que si $\lambda = 0$ et P de degré 0. La seule valeur propre de a est donc 0, les seuls vecteurs propres de a sont les polynômes de degré 0.
   b. Pour i entre 2 et $2n$, $a^i(P) = P^{(i)}$. La seule valeur propre de a^i est donc encore 0, les vecteurs propres sont tous les polynômes non nuls de degré strictement plus petit que i.
3. Valeurs et vecteurs propres de b.
   a. Par définition $b(X^k) = X^{2n-k}$ pour k entre 0 et $2n$. On en déduit que $b \circ b$ coïncide avec l'identité sur les vecteurs de la base canonique d'où $b \circ b = \operatorname{Id}_E$. Si λ est un vecteur propre, il existe un polynôme non nul P tel que $b(P) = \lambda P$. En composant, il vient $P = b \circ b(P) = \lambda b(P) = \lambda^2 P$ d'où $\lambda^2 = 1$ car P n'est pas le polynôme nul. Les deux seules valeurs propres possibles sont donc 1 ou -1.
   b. Rappelons la notion de *valuation* d'un polynôme non nul qui est en quelque sorte symétrique de celle de degré. Un polynôme P est de valuation v et de degré d lorsqu'il s'écrit
$$P = a_v X^v + a_{v+1} X^{v+} + \cdots + a_d X^d \text{ avec } v \leq d \text{ et } a_v \neq 0 \text{ et } a_d \neq 0$$
   Prendre l'image par b échange valuation et degré :
$$b(P) = a_d X^{2n-d} + \cdots a_v X^{2n-v}$$
   Si P est un vecteur propre, on doit donc avoir
$$d = 2n - v \Rightarrow 2n = v + d \Rightarrow 2n \leq 2d \text{ (car } v \leq d) \Rightarrow d \geq n$$
   c. Les polynômes proposés exploitent la symétrie sous-jacente dans la définition de b. On obtient des vecteurs propres
$$b(X^n) = X^n, \quad \forall k \in \{1, \cdots n\} \begin{cases} b(X^{n-k} + X^{n+k}) = X^{n-k} + X^{n+k} \\ b(-X^{n-k} + X^{n+k}) = -\left(-X^{n-k} + X^{n+k}\right) \end{cases}$$
4. D'après les questions 2b et 3b, si $i \leq n$, les conditions sur les degrés sont contradictoires et il ne peut exister de vecteurs propres communs à a et b.
Si $i > n$, la question 3c fournit des exemples de polynômes de degré strictement plus petit que i qui sont propres pour b. Il existe donc des vecteurs propres communs dans ce cas.
En conclusion, il existe des vecteur propres communs à a^i et b si et seulement si $i > n$.

Partie III. Condition nécessaire. Conditions suffisantes.

1. Si a et b admettent un vecteur propre commun x avec $a(x) = \lambda x$ et $b(x) = \mu x$, alors
$$[a, b](x) = a(b(x)) - b(a(x)) = \mu a(x) - \lambda b(x) = (\mu\lambda - \lambda\mu)x = 0_E$$
Le noyau du crochet contient un vecteur non nul, donc le rang du crochet est strictement plus petit que la dimension de l'espace d'après le théorème du rang.
Qu'en est-il de la réciproque ? Si deux endomorphismes ont un crochet dont le rang est strictement plus petit que la dimension de l'espace, ont-ils forcément un vecteur propre commun ?
L'exemple de la partie II montre que non. Pour $n = 1$, l'espace est de dimension 3. .On sait, d'après la dernière question de la partie II, que a et b ne peuvent avoir de vecteurs propres communs mais on a calculé au début que le rang de $[a, b] = 2$.

2. a. Si le crochet est l'application nulle, son noyau est E et contient tout. La propriété $\mathcal{H}$ est donc vérifiée.

   b. On doit montrer que $\ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par b. Pour tout vecteur y dans cet espace,
$$\begin{aligned}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)(b(y)) = a \circ b(y) - \lambda b(y) &= a \circ b(y) - b \circ a(y) + b \circ a(y) - \lambda b(y)\\ &= [a, b](y) + b \circ (a - \lambda \operatorname{Id}_E)(y) = 0_E\end{aligned}$$
Le deuxième terme étant nul car $y \in \ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et le premier car $y \in \ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \ker([a, b])$ qui est supposé par l'énoncé.
Cette stabilité montre que la restriction de b est un endomorphisme du $\mathbb{C}$ espace vectoriel $\ker(a-\lambda \operatorname{Id}_E)$. D'après la propriété que l'énoncé en début de cette partie nous permet d'utiliser sans justification, il admet une valeur propre μ donc un vecteur propre qui sera un vecteur propre aussi pour a car dans l'espace $\ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

3. Dans un espace de dimension 1, tout vecteur non nul est vecteur propre pour n'importe quel endomorphisme. Tout couple d'endomorphismes admet donc des vecteurs propres communs. La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.

4. Dans cette question, $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ *ne vérifie pas la propriété* $\mathcal{H}$. On note $c = [a, b]$. On suppose $rg(c) = 1$ et on considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de a.

   a. Par hypothèse, le couple (a, b) ne vérifie pas la propriété $\mathcal{H}$. Cela signifie que, pour n'importe quelle valeur propre λ de a, il existe un vecteur u tel que $u \in \ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$ (c'est à dire $a(u) = \lambda u$) et $u \notin \ker([a, b])$ (c'est à dire $c(u) = [a, b](u) \neq 0_E$).

   b. On pose $v = c(u)$, c'est un vecteur non nul de $\operatorname{Im}(c)$. Comme par hypothèse, le rang de c est 1, on peut en déduire que $\operatorname{Im}(c) = \operatorname{Vect}(v)$.
Montrons que $v \in \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$, on en déduira que $\operatorname{Im}(c) \subset \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
$$\begin{aligned}v = c(u) = (a \circ b)(u) - (b \circ a)(u) &= a(b(u)) - \lambda b(u)\\ &= (a - \lambda \operatorname{Id}_E)(b(u)) \in \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)\end{aligned}$$

   c. Il est évident que $\operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par a. Pour montrer la stabilité par b, considérons un x quelconque dans $\operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Il existe un y tel que $x = a(y) - \lambda y$. On en déduit,
$$\begin{aligned}b(x) = (b \circ a)(y) - \lambda b(y) &= -[a, b](y) + (a \circ b)(y) - \lambda b(y)\\ &= \underbrace{-[a, b](y)}_{\in \operatorname{Im}(c) \subset \operatorname{Im}(a-\lambda \operatorname{Id}_E)} + (a - \lambda \operatorname{Id}_E)(b(y)) \in \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)\end{aligned}$$

5. On démontre les propositions $\mathcal{P}_n$ par récurrence. On a vu que $\mathcal{P}_1$ est vraie. On veut montrer l'implication $\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n$.
On considère donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n avec deux endomorphismes a, b tels que $\operatorname{rg}([a, b]) = 1$.
   - Si le couple (a, b) vérifie la propriété $\mathcal{H}$, la question 2. montre que a et b ont un vecteur propre en commun.
   - Si le couple (a, b) ne vérifie pas la propriété $\mathcal{H}$, il existe (question 4) une valeur propre λ de a telle que
$$\operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E) \text{ stable par } a \text{ et } b$$
Notons V ce sous-espace et a_V, b_V les restrictions à V de a et b. Il est clair que le crochet des restrictions est la restriction du crochet et que restreindre diminue le rang. On en déduit
$$\operatorname{rg}([a_V, b_V]) \leq 1$$
     - Si $[a_V, b_V] = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on se retrouve dans les conditions de la question 2. Le couple de restrictions vérifie la propriété $\mathcal{H}$ ce qui entraine qu'elles admettent un vecteur propre commun.
     - Si le rang est 1. On peut utiliser l'hypothèse de récurrence, les deux restrictions admettent un vecteur propre commun donc le endomorphismes a et b aussi.

Deux endomorphismes peuvent admettre un vecteur propre commun sans que le rang du crochet soit inférieur ou égal à 1. La partie II en fournit un exemple : a^2 et b ont un vecteur propre commun bien que le rang du crochet soit 2.

Exercice 2

1. a. Soit x_1 un point de X et $a_1 \in V$ tels que $a_1(x_1) \neq 0$. Il existe bien de tels objets car sinon V ne serait formé que de l'application nulle. En divisant au besoin la fonction a_1 par le scalaire $a_1(x_1)$, on peut supposer que $a_1(x_1) = 1$. La famille (a_1) est une famille libre de V, on peut la compléter pour obtenir une base

$$(a_1, w_2, \cdots, w_p)$$

Pour i entre 2 et p, on pose alors $a_i = w_i - w_i(x_1)a_1$. Il est clair que tous les w_i s'expriment en fonction des a_j qui engendrent donc V et forment une base. De plus, par construction, $a_i(x_1) = 0$.

b. Considérons u_{k+1}. C'est une fonction non nulle. Il existe donc $x_{k+1} \in X$ tel que $u_{k+1}(x_{k+1}) \neq 0$. Comme $u_{k+1}(x_i) = 0$ pour tous les i de 1 à k, on a $x_{k+1} \notin \{x_1, \cdots, x_k\}$. On pose alors

$$v_{k+1} = \frac{1}{u_{k+1}(x_{k+1})} u_{k+1}$$

$$\forall i \neq k+1, \qquad v_i = u_i - u_i(x_{k+1}) v_{k+1}$$

Ici encore, comme les u_i s'expriment en fonction des v_j, ces derniers engendrent V et forment une base. Pour laquelle

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \forall j \in \{1, \cdots, k+1\} : v_i(x_j) = \delta_{ij}$$

c. Les deux questions précédentes permettent de prouver la proposition demandée par récurrence sur le nombre de points.

2. a. On choisit une base de V comme dans la question 1.. Pour tout réel a, la fonction f_a s'exprime dans cette base

$$f_a = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i$$

Si on prend la valeur en x_i on obtient alors

$$\lambda_i = f_a(x_i) = f(a + x_i)$$

Ce qui prouve la formule demandée.

b. On considère

$$f(h+b) = \sum_{i=1}^{p} f(h + x_i) v_i(b)$$

$$f(b) = f(0+b) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i) v_i(b)$$

donc

$$\frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \sum_{i=1}^{p} \frac{f(x_i + h) - f(x_i}{h} v_i(b)$$

et comme f est dérivable on obtient en passant à la limite en 0 pour h :

$$f'(b) = \sum_{i=1}^{p} f'(x_i) v_i(b)$$

$$f' = \sum_{i=1}^{p} f'(x_i) v_i$$

Ce qui prouve $f' \in V$. En fait, la formule du 2.a. est valable non seulement pour f mais pour toute $v \in V$ ce qui prouve que la dérivation est un endomorphisme de V. La famille $(f, f', \cdots, f^{(p)})$ est à $p+1$ éléments dans l'espace V de dimension p. Elle est donc liée. Ceci entraine l'existence d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont f est solution.