# Exercice 1

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$. On définit trois vecteurs $a_1$, $a_2$, $a_3$ de $E$ par :

$$\begin{cases} a_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ a_2 = e_1 + e_3 \\ a_3 = -e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

1. Montrer que
$$\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3), \mathcal{A}_1 = (e_1, a_2, a_3), \mathcal{A}_2 = (a_1, e_2, a_3)$$
sont des bases. Préciser les matrices de passage
$$P_{\mathcal{A}\mathcal{E}}, P_{\mathcal{A}_1\mathcal{E}}, P_{\mathcal{A}_2\mathcal{E}}$$
2. On note $p_1$ le projecteur sur $\operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(e_1)$. Calculer :
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} p_1,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}} p_1,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{A}} p_1,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} p_1$$
3. On note $p_2$ le projecteur sur $\operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(a_1)$. Calculer :
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} p_2,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}} p_2,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{A}} p_2,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} p_2$$

# Problème

Dans ce problème, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On rappelle les définitions des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme. Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Une *valeur propre* de $f$ est un élément $\lambda$ de $\mathbf{K}$ pour lequel il existe un vecteur *non nul* $x$ de $E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le *spectre* de $f$ est l'ensemble de ses valeurs propres.
- Un *vecteur propre* de $f$ est un vecteur non nul $x$ de $E$ pour lequel il existe un $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

L'objet de ce problème[1] est d'étudier les vecteurs propres *communs* à deux endomorphismes. Par définition, un vecteur $x$ est un vecteur propre commun aux endomorphismes $f$ et $g$ si et seulement il est non nul et s'il existe $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbf{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$.
On utilise aussi le *crochet* : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ de deux endomorphismes $f$ et $g$ de $\mathcal{L}(E)$ ou de deux matrices carrées $[A, B] = AB - BA$.

[1] d'après CCP 2013 MP maths1

## Partie I. Exemple.

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$
$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On considère aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ muni d'une base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit les endomorphismes $a$, $b$, $c$, $d$ dans $\mathcal{L}(E)$ et les vecteurs $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ par les relations

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(a) = A, \quad \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(b) = B, \quad \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(c) = C, \quad \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(d) = D,$$
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(u_1) = U_1, \quad \cdots, \quad \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(u_5) = U_5.$$

On note $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.

1. En discutant selon $\lambda \in \mathbb{R}$ du rang de $A - \lambda I_3$ puis de $B - \lambda I_3$, déterminer les spectres de $a$ et de $b$.
2. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres de $a$. Montrer qu'aucun élément de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à $a$ et $b$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(b - 2\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}(u_4)$ et que $\dim(\ker(b - 2\operatorname{Id}_E)) = 2$.
4. Montrer que $\ker(a - \operatorname{Id}_E) \cap \ker(b - 2\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}(u_5)$ et déterminer tous les vecteurs propres communs à $a$ et $b$.

## Partie II. Exemple avec des polynômes.

Dans cette partie $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$. On définit des applications $a$ et $b$ par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{2n}[X], \quad a(P) = P', \qquad b(P) = X^{2n}\,\widehat{P}(\frac{1}{X}).$$

Ces applications sont des endomorphismes de $E$, on ne demande pas de le vérifier.

1. Dans le cas particulier $n = 1$.

a. Former les matrices $A$ et $B$ des endomorphismes $a$ et $b$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

b. Calculer $[A, B]$ et $[A^2, B]$ puis leurs rangs.

2. Valeurs propres et vecteurs propres de $a$.
   a. Montrer que $a$ admet une unique valeur propre $\lambda$ à déterminer. Quels sont les vecteurs propres de $a$ ?
   b. Soit $i$ entier entre 2 et $2n$. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de $a^i = a \circ \cdots \circ a$ ?
3. Valeurs propres et vecteurs propres de $b$.
   a. Que vaut $b \circ b$ ? Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de $b$ ?
   b. Montrer que si $P$ est un vecteur propre de $b$ alors $\deg(P) \geq n$.
   c. Calculer les images par $b$ de $X^n$ et des polynômes $X^{n-k} + X^{n+k}$ et $-X^{n-k} + X^{n+k}$ pour $k$ entier entre 1 et $n$.
4. Vecteurs propres communs. Pour quel entiers $i$ entre 1 et $2n$, les endomorphismes $a^i$ et $b$ ont-ils des vecteurs propres communs ?

## Partie III. Condition nécessaire. Conditions suffisantes.

On pourra utiliser sans démonstration que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.
Dans toute cette partie (sauf dans la question 1), $E$ désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
On dit que le couple $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifie la propriété $\mathcal{H}$ si et seulement si il existe une valeur propre $\lambda$ de $a$ telle que $\ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \ker([a, b])$.
Pour tout naturel non nul $k$, on note $\mathcal{P}_k$ la proposition suivante :

> Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V$ tel que $\dim(V) \leq k$ et tout couple d'endomorphismes $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(V)^2$ tels que $\operatorname{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$, il existe un vecteur propre commun à $\varphi$ et $\psi$.

1. Dans cette question, $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbf{K}$ égal $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que si $a$ et $b$ admettent un vecteur propre commun alors $\operatorname{rg}([a, b]) < \dim(E)$. Que penser de la réciproque ?
2. Soit $a$ et $b$ deux endomorphismes de $E$.
   a. Montrer que si $[a, b] = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $(a, b)$ vérifie la propriété $\mathcal{H}$.
   b. On suppose ici que $(a, b)$ vérifie la propriété $\mathcal{H}$ avec $\ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \ker([a, b])$. Montrer que $\ker(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable pour $b$. En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à $a$ et $b$.
3. Démontrer la proposition $\mathcal{P}_1$.
4. Dans cette question, on considère $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ qui *ne vérifie pas la propriété* $\mathcal{H}$.
   On note $c = [a, b]$, on suppose que $rg(c) = 1$ et on considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $a$.
   a. Justifier l'existence d'un $u \in E$ tel que $a(u) = \lambda u$ et $c(u) \neq 0$.
   b. Montrer que $\operatorname{Im}(c) = \operatorname{Vect}(v)$ où $v = c(u)$. En déduire que $\operatorname{Im}(c) \subset \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
   c. Montrer que $\operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par $a$ et $b$.
5. Montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tous les naturels non nuls $n$.
   Si deux endomorphismes ont un vecteur propre commun, leur crochet est-il de rang au plus 1 ?

# Exercice 2

On rappelle que le symbole de Kronecker $\delta_{ij}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
L'objet de ce problème est de démontrer le *Lemme de Hochschild* (question 1) et d'en déduire une application.
Soit $X$ un ensemble quelconque et $V$ un sous espace vectoriel de dimension $p$ de l'espace de *toutes* les fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$.

1. a. Montrer qu'il existe $x_1 \in X$ et une base $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ de $V$ telle que
   $$\forall i \in \{1, \cdots, p\} : a_i(x_1) = \delta_{i1}.$$
   b. Soit $k < p$, on suppose qu'il existe une famille $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ d'éléments de $X$ et une base $(u_1, \cdots, u_p)$ de $V$ telle que
   $$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \forall j \in \{1, \cdots, k\} : u_i(x_j) = \delta_{ij}.$$
   Montrer qu'il existe un élément $x_{k+1}$ de $X$ et une base $(v_1, \cdots, v_p)$ de $V$ telle que
   $$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \forall j \in \{1, \cdots, k+1\} : v_i(x_j) = \delta_{ij}.$$
   c. Montrer qu'il existe une base $(w_1, \cdots, w_p)$ de $V$ et une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ d'éléments de $X$ vérifiant
   $$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2 : w_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

2. Application. Soit $f$ une fonction *dérivable* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'espace engendré par ses translatées soit de dimension finie. On va montrer qu'elle vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
   Pour tout réel $a$, on note $f_a$ l'application définie par $f_a(t) = f(a+t)$ pour tout $t$ réel. On pose
   $$V = \mathrm{Vect}(f_a, a \in \mathbb{R})$$
   et on suppose que $V$ (sous-espace de l'espace de toutes les applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est *de dimension finie* $p$.

   a. Montrer qu'il existe une base $(v_1, \cdots, v_p)$ de $V$ et des réels $(x_1, \cdots, x_p)$ tels que
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a+b) = \sum_{i \in \{1,\ldots,p\}} f(a+x_i)v_i(b).$$

   b. Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable, que $f'$ est dans $V$ et qu'il existe des réels $a_0, a_1, \cdots a_p$ tels que
   $$a_p f^{(p)} + a_{p-1} f^{(p-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0.$$