Problème 1

Préliminaire

La première question est du cours. Pour la deuxième, il suffit de mettre u en facteur.

$$\begin{aligned}\frac{1}{u-t} &= \frac{1}{u(1-\frac{t}{u})} = \frac{1}{u}(1+(\frac{t}{u})+(\frac{t}{u})^2+\cdots+(\frac{t}{u})^n+o(t^n)) \\ &= \frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}t+\cdots+\frac{1}{u^{n+1}}t^n+o(t^n)\end{aligned}$$

Partie I : nombres de Fibonacci

1. On obtient I en calculant les réels qui annulent le dénominateur soit

$$I = \left]\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right[$$

Pour calculer f_0, f_1, f_2, f_3 il ne faut surtout pas dériver mais plutôt calculer un développement limité et en déduire les valeurs en 0 des dérivées à l'aide de la formule de Taylor-Young et de l'unicité d'un développement limité.

$$\begin{aligned}f(t) = \frac{1}{1-(t+t^2)} &= 1+(t+t^2)+(t+t^2)^2+(t+t^2)^3+o((t+t^2)^3) \\ &= 1+t+2t^2+3t^3+o(t^3)\end{aligned}$$

car $o((t+t^2)^3) = o(t^3)$ car $(t+t^2)^3 \sim t^3$, $(t+t^2)^2 = t^2+2t^3+o(t^3)$, $(t+t^2)^3 = t^3+o(t^3)$. Ensuite :

$$f_0 = f(0) = 1, \quad f_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1, \quad f_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = 2, \quad f_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 3$$

2. Remarquons que par définition $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1+1 = 2$, $\varphi_3 = 1+2 = 3$. Les deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coincident donc pour les premiers termes, pour montrer leur égalité on va vérifier qu'elles satisfont à la même relation de récurrence. Deux méthodes sont possibles, soit en calculant la dérivée d'ordre n (supposé ≥ 2) en 0 de $t \to (1-t-t^2)f(t)$ à l'aide de la formule de Leibniz soit en raisonnant directement avec des développements limités. Utilisons les développements limités :

$$(1-t-t^2)f(t) = (1-t-t^2)(f_0+f_1t+\cdots f_nt^n+o(t^n))$$

Ce développement de f suffit pour obtenir un développement à l'ordre n du produit. Le terme en t^n de ce produit vient de f_nt^n multiplié par 1, de f_{n-1} multiplié par $-t$, de $f_{n-2}t^{n-2}$ multiplié par $-t^2$ soit

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2}$$

Comme par définition de f le fonction $t \to (1-t-t^2)f(t)$ est constante égale à 1, on obtient bien

$$\forall n \geq 2, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

3. On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$ ou 1 la formule est vérifiée. Supposons la vérifiée pour $n-1$ et $n-2$. En ajoutant ces deux relations, on obtient

$$1+(\varphi_0+1)+(\varphi_1+\varphi_0)+\cdots+(\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}) = \varphi_{n+1}+\varphi_n$$

ce qui donne, en tenant compte de la relation de définition :

$$1+\underbrace{2}_{\varphi_0+\varphi_1}+\varphi_2+\varphi_3+\cdots+\varphi_n = \varphi_{n+2}.$$

4. a. En réduisant au même dénominateur il vient

$$\frac{\alpha}{u-t}+\frac{\beta}{v-t} = \frac{(\alpha v+\beta u)-(\alpha+\beta)t}{(u-t)(v-t)}.$$

On sait d'autre part que $1-t-t^2 = -(u-t)(v-t)$ avec par exemple $u = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$, $v = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$. La relation demandée est vérifiée lorsque

$$\begin{cases}\alpha v+\beta u = -1 \\ \alpha+\beta = 0\end{cases}$$

Le couple (α, β) avec $\alpha = \frac{1}{u-v} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, $\beta = -\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ est solution. On prend finalement :

$$\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})-t}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})-t}.$$

b. D'après la question 2., φ_n est le coefficient de t^n dans un développement limité de f à un ordre supérieur à n. La fonction f se décompose en une somme de deux fonctions dont on connait les développements limités (préliminaire). On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n = (-\frac{1}{\sqrt{5}})\frac{1}{(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}))^{n+1}}+(\frac{1}{\sqrt{5}})\frac{1}{(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}))^{n+1}}.$$

Comme $\frac{1}{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ et $\frac{1}{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, on a finalement :

$$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

PARTIE II : nombres de dérangements.

1. Ici encore, il vaut mieux multiplier deux développements limités usuels puis utiliser la formule de Taylor et l'unicité d'un développement pour calculer d_0, d_1, d_2, d_3.

$$\begin{aligned}\frac{e^{-t}}{1-t} &= (1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+o(t^3))(1+t+t^2+t^3+o(t^3))\\ &= 1+(1-1)t+(1-1+\frac{1}{2})t^2+(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6})t^3+o(t^3)\\ &= 1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3) = d_0+d_1t+\frac{d_2}{2}t^2+\frac{d_3}{3!}t^3+o(t^3)\\ &\Rightarrow d_0=1,\quad d_1=0,\quad d_2=1,\quad d_3=2.\end{aligned}$$

2. Il est évident que $\delta_1 = 0$. La seule permutation d'un ensemble à un élément est l'identité; ce n'est pas un dérangement.
Pour un ensemble à deux éléments, il y a deux permutations : l'identité (qui n'est pas un dérangement) et la permutation qui échange les deux éléments (qui en est un). On a donc $\delta_2 = 1$.
Pour un ensemble à trois éléments, il y a 6 permutations. L'identité et les trois permutaions qui échangent deux éléments en laissant le troisième fixe ne sont pas des dérangements. Les deux dernières (permutations circulaires) sont des dérangements; on a donc $\delta_3 = 2$.

3. Par définition $e^t g(t) = \frac{1}{1-t}$ un développement de cette fonction est donc

$$1+t+t^2+\cdots+t^n+o(t^n)$$

Ce développement est unique, il coïncide avec celui obtenu par la formule de Taylor-Young, soit par identification : $\frac{(e^t g)^{(n)}(0)}{n!} = 1$. Le calcul de la dérivée d'ordre n se fait à l'aide de la formule de Leibniz. Toutes les dérivées de exp valent 1 en 0, celles de g sont les d_k donc

$$1 = \frac{(e^t g)^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}d_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{d_k}{k!}$$

4. Les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident pour les premières valeurs de n. Considérons un ensemble E de cardinal n et classons les permutations de E suivant leur nombre de points fixes.
Soit k entre 0 et n, quel est le nombre de permutations de E avec exactement $n-k$ points fixes. ?
Une permutation laissant fixes tous les points d'une partie donnée est un dérangement du complémentaire de cette partie. Il y a donc d_k permutations laissant fixes tous les points d'une partie donnée et $\binom{n}{n-k}d_k$ permutations laissant fixes tous les points d'un partie quelconque à $n-k$ éléments. On en déduit

$$n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}d_k.$$

En exprimant les coefficients du binome avec des factorielles et en simplifiant par $n!$ on obtient la même relation qu'en 3.. On en déduit par récurrence l'égalité entre les deux suites.

5. On vérifie facilement que $(\frac{1}{1-t})^{(k)} = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$. Utilisons la formule de Leibniz pour calculer $\delta_n = d_n$:

$$d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!} = n!\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

après avoir posé $k' = n-k$, être revenu à la notation k et avoir supprimé les deux premiers termes qui s'annulent.
En évaluant $\frac{\delta_n}{n!} - \frac{\delta_{n-1}}{(n-1)!}$ avec cette formule, on obtient la deuxième relation demandée.

PARTIE III : nombres de partitions

1. Calculons un développement limité à l'ordre 3 de h

$$\begin{aligned} e^t-1 &= t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+o(t^3) && \times 1\\ (e^t-1)^2 &= t^2+t^3+o(t^3) && \times\frac{1}{2}\\ (e^t-1)^3 &= t^3+o(t^3) && \times\frac{1}{6}\end{aligned}$$

On en déduit

$$e^{e^t-1} = 1 + (e^t-1) + \frac{1}{2}(e^t-1)^2 + \frac{1}{6}(e^t-1)^3 + \underbrace{o((e^t-1)^3)}_{=o(t^3)}$$
$$= 1 + t + (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})t^2 + (\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})t^3 + o(t^3) = 1 + t + t^2 + \frac{5}{6}t^3 + o(t^3).$$

Ce développement est le même que celui obtenu avec la formule de Taylor-Young, on en déduit par identification :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 5$$

2. Pour calculer les premières valeurs de π_n, formons explicitement les partitions pour des ensembles à 1, 2 3 éléments $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$. On obtient

$$\begin{array}{l}
\{\{a\}\} \\
\{\{a\},\{b\}\},\{\{a,b\}\} \\
\{\{a\},\{b\},\{c\}\},\{\{a,b\},\{c\}\},\{\{a,c\},\{b\}\},\{\{b,c\},\{a\}\},\{\{a,b,c\}\}
\end{array}$$

On en déduit

$$\pi_1 = 1, \quad \pi_2 = 2, \quad \pi_3 = 5$$

3. Calculons h', il vient $h'(t) = (e^t-1)h(t)$. On peut alors former un développement limité de h' en 0 comme un produit.

$$(\frac{p_0}{0!} + \frac{p_1}{1!}t + \frac{p_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{p_n}{n!}t^n + o(t^n))(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + o(t^n))$$

Le coefficient de t^n dans un tel développement limité est

$$\begin{aligned}
&\frac{p_0}{0!}\frac{1}{n!} + \frac{p_1}{1!}\frac{1}{(n-1)!} + \frac{p_2}{2!}\frac{1}{(n-2)!} + \cdots + \frac{p_n}{n!}\frac{1}{0!} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{0!n!}p_0 + \frac{n!}{1!(n-1)!}p_1 + \frac{n!}{2!(n-2)!}p_2 + \cdots + \frac{n!}{n!0!}p_n\right) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de Taylor appliqué à h', ce coefficient est aussi

$$\frac{1}{n!}(h')^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}p_{n+1}$$

On en déduit par identification la formule demandée.

4. On vient de voir (1. et 2.) que $\pi_n = p_n$ pour $n = 0,1,2,3$. Pour démontre l'égalité pour toutes les valeurs par récurrence, montrons que

$$\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi_k$$

Considérons un ensemble E' de cardinal $n+1$ obtenu en adjoignant un élément z à un ensemble E de cardinal n. Cet élément z figure dans une des parties d'une partition de E'. Classons les partitions de E' suivant le nombre d'éléments que contient la partie contenant z.
Soit i un entier entre 1 et $n+1$ et X une partie de E' à k éléments contenant z ; examinons une partition $\mathcal{A}$ de E' telle que $X \in \mathcal{A}$.
En enlevant X à $\mathcal{A}$, on obtient une partition de $E' - X$ qui est de cardinal $n+1-i$. Il existe π_{n+1-i} telles partitions.
D'autre part, il existe $\binom{n}{i-1}$ ensembles X contenant z et à i éléments dans E' (autant que de parties à $i-1$ éléments dans E). On en déduit que $\binom{n}{i-1}\pi_{n+1-i}$ est le nombre de partitions de E' pour lesquelles la partie contenant z est de cardinal i. Cette classification des partitions de E' conduit à la relation

$$\pi_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\pi_{n+1-i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\pi_{n-j} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi_k$$

en posant $j = i-1$ puis $k = n-j$ avec $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ceci achève la démonstration.

Problème 2

Préliminaires

1. Les issues de l'expérience sont les suites de m Pile ou Face. la probabilité (élémentaire) d'une issue est

$$p^{\text{Nb de Face}}q^{\text{Nb de Pile}}$$

L'événement $\mathcal{L}$ fixe les n premiers Pile ou Face, les suivants sont quelconques. On en déduit

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}) = p^{\text{Nb Face ds }\mathcal{L}}q^{\text{Nb Pile ds }\mathcal{L}}\underbrace{\sum_{k=0}^{m-n}\binom{m-n}{k}p^kq^{m-n-k}}_{=1} = p^{\text{NbFace }\mathcal{L}}q^{\text{NbPile }\mathcal{L}}$$

Cette probabilité est indépendante du nombre total m de lancers. On aurait aussi pu raisonner en utilisant l'indépendance des événements.

2. On transforme la matrice par les opérations élémentaires suivantes qui conservent le rang
$$L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - bL_2$$
On obtient la matrice triangulaire supérieure
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$$
Elle est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont non nuls c'est à dire lorsque a, b, c sont deux à deux distincts.

I. Première obtention de deux Faces consécutifs.

1. Établissement d'une relation de récurrence.
   a. On ne peut obtenir deux Face en un seul lancer : $E_1 = \emptyset$, $p_1 = 0$. L'événement E_2 et le singleton $\{(F,F)\}$ donc $p_2 = p^2$. L'événement E_3 est aussi un singleton. Il ne peut se réaliser que d'une seule manière : $E_3 = \{(P,F,F)\}$ donc $p_3 = qp^2$.
   b. L'événement E_{n+3} se réalise si et seulement si Face est obtenu aux lancers $n+2$ et $n+3$ et aucune séquence de 2 Face consécutifs n'a été obtenu auparavant c'est à dire
$$\begin{aligned} E_{n+3} &= F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k} \\ &= F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap \overline{E_{n+1}} \cap \overline{E_n} \cap \cdots \cap \overline{E_1} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{E_n} \cap \cdots \cap \overline{E_1} \end{aligned}$$
car
$$F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap \overline{E_{n+1}} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1}.$$
Comme on a obtenu un Face au lancer $n+2$ et que cela n'était pas la première séquence de Face, on avait forcément un Pile au lancer $n+1$.
   c. La relation précédente, s'écrit encore
$$E_{n+3} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{n} E_k}.$$
Comme les événements E_k sont deux à deux incompatibles,
$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} E_k}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k \Rightarrow p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$
   d. Détachons le p_n de la somme dans la parenthèse :
$$p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k - p_n\right) = p_{n+2} - p^2 q p_n.$$
On connait les valeurs de p_1, p_2 et p_3. Pour que la relation de récurrence soit vérifiée pour $n = 0$, on doit avoir
$$p_3 = p_2 - p^2 q p_0 \Rightarrow -p^2 q p_0 = qp^2 - p^2 = -p^3 \Rightarrow p_0 = \frac{p}{q}.$$

2. Suites et matrices
   a. Toute combinaison linéaire de suites vérifiant la relation de récurrence vérifie encore cette relation. L'ensemble U est donc un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace formé par toutes les suites réelles. La dimension de U est 3 car l'application
$$\varphi : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto (u_0, u_1, u_2) \end{cases}$$
est un isomorphisme. En effet toute suite vérifiant la relation de récurrence d'ordre 3 est complètement déterminée par ses trois premiers termes. Définissons des suites particulières $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ de U par leurs premiers termes :
$$\beta_0 : 1, 0, 0, \cdots; \qquad \beta_1 : 0, 1, 0, \cdots; \qquad \beta_2 : 0, 0, 1, \cdots; \qquad \text{et } \mathcal{B} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2).$$
C'est une base de U car son image par φ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans $\mathcal{B}$, les coordonnées d'un vecteur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les trois premiers termes (u_0, u_1, u_2).
L'application S de décalage d'indice est clairement linéaire. De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ c'est à dire vérifie la relation de récurrence, la suite décalée la vérifie aussi. Donc S est un endomorphisme.
Les coordonnées de $S((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ dans $\mathcal{B}$ sont (u_1, u_2, u_3) soit
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -p^2 q u_0 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p^2 q & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} S = A.$$

b. La division euclidienne de P par $X-p$ conduit à
$$P = X^3 - X^2 + p^2q = (X-p)(X^2 - qX - pq)$$
Étudions dans $[-1,+1]$ le polynôme du second degré $f(x) = x^2 - qx - pq$. En calculant la dérivée $f'(x) = 2x - q$, on montre qu'elle atteint son minimun en $\frac{q}{2}$. De plus, comme
$$f(-1) = 1 + q^2 > 0, \quad f(0) = -pq < 0, \quad f(\frac{q}{2}) = -\frac{q^2}{4} - pq < 0, \quad f(1) = p^2 > 0$$
la fonction f s'annule en un $r_2 \in]-1,0[$ et en un $r_1 \in]\frac{q}{2},1[\subset]0,1[$.

c. Transformons $A - \lambda I_3$ par opérations élémentaires :
$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -p^2q & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -p^2q \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & -p^2q \end{pmatrix}$$
$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & -p^2q - (1-\lambda)(-\lambda^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & -p^2q + \lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}$$
On en déduit que $A - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

d. Les réels p, r_1, r_2 sont les racines de P donc les suites géométriques de raison p, r_1, r_2 sont dans U. La matrice dans $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{G}$ formée par ces suites est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & r_1 & r_2 \\ p^2 & r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}$$
Cette matrice (de VanderMonde) est inversible si r_1, r_2, p sont deux à deux distincts. Il s'agit alors de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{G}$. On a montré que $r_1 \neq r_2$. En revanche, il est possible d'avoir $r_1 = p$ si p est racine double de P c'est à dire si $p = \frac{2}{3}$. Lorsque $\mathcal{G}$ est une base, la matrice de S dans $\mathcal{G}$ est
$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

3. Expression des probabilités p_n.
La suite proposée est une combinaison des suites géométriques de raison r_1 et r_2. Elle est donc dans U. Il suffit de montrer que les trois valeurs initiales coincident avec p_0, p_1, p_2.
Pour $n = 0$:
$$p^2 \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{r_1 - r_2} = -\frac{p^2}{r_1r_2} = \frac{p^2}{pq} = \frac{p}{q} = p_0$$
car r_1 et r_2 sont les racines de $x^2 - qx - pq$ donc $r_1r_2 = -pq$.
Pour $n = 1$, le numérateur s'annule. La valeur est donc celle de p_1.
Pour $n = 2$, on simplifie par $r_1 - r_2$ et on obtient $p^2 = p_2$.

4. Temps d'attente moyen.

a. Il s'agit de sommes géométriques convergentes
$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\left(\frac{1 - r_1^n}{1 - r_1} - \frac{1 - r_2^n}{1 - r_2}\right)$$
La suite converge vers
$$\frac{p^2}{r_1 - r_2}\left(\frac{1}{1 - r_1} - \frac{1}{1 - r_2}\right) = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\,\frac{r_1 - r_2}{(1 - r_1)(1 - r_2)} = \frac{p^2}{p^2} = 1$$
car $f(x) = x^2 - qx - pq = (x - r_1)(x - r_2)$ donc
$$(1 - r_1)(1 - r_2) = f(1) = p^2.$$
Ce résultat est cohérent avec l'interprétation probabiliste des p_k pour $k \geq 1$.

b. La limite demandée se calcule à l'aide de dérivées. Considérons
$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad g'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} - (n+1)\frac{x^n}{1 - x}$$
Pour $|x| < 1$, les suites (x^k) et(kx^{k-1}) convergent vers 0. On en déduit que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow \frac{1}{(1 - x)^2}$$
Par linéarité, la limite demandée est
$$\frac{p^2}{r_1 - r_2}\left(\frac{1}{(1 - r_1)^2} - \frac{1}{(1 - r_2)^2}\right) = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\,\frac{r_2^2 - r_1^2 - 2(r_2 - r_1)}{(1 - r_1)^2(1 - r_2)^2}$$
$$= \frac{p^2(2 - r_1 - r_2)}{p^4} = \frac{2 - q}{p^2} = \frac{1 + p}{p^2}$$

II. Première obtention de r Faces consécutifs.

1. En raisonnant exactement comme dans la première partie, on obtient
$$p_1 = \cdots = p_{r-1} = 0,\ p_r = p^r,\ p_{r+1} = qp^r$$
L'événement E_{n+r+1} est réalisé si Face est sorti aux r derniers lancers mais pas au précédent et si aucune séquence ne s'est réalisée lors des n premiers tirages. Or l'événement « une séquence de r Face s'est réalisée lors des n premiers lancers » est l'événement
$$E_1 \cup \cdots \cup E_n$$
qui est une union d'événements incompatibles. On en déduit
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+r+1} = p^r q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$
En isolant le $k = n$ de la somme et en utilisant la formule au rang $n-1$, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+r+1} = p_{n+r} - p^r q p_n$$
La valeur choisie conventionnellement pour p_0 doit vérifier
$$p_{r+1} = p_r - p^r q p_0 \Leftrightarrow p^r q p_0 = p^r - qp^r = p^{r+1} \Leftrightarrow p_0 = \frac{p}{q}$$

2. a. Il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et dans lequel B ne s'anulle pas car B est une fonction polynomiale donc continue telle que $B(0) = 1 \neq 0$.

   b. La fraction F est $\mathcal{C}^\infty$ dans I, elle admet donc des développements limités à tous les ordres.
   Pour tout $m > r+1$, considérons un entier $n \geq m + r + 1$ et
$$Q = BF = \left(1 - X + p^r q X^{r+1}\right)\left(u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n + o(x^n)\right)$$
   En développant à droite, on obtient un développement limité à l'ordre n dont le coefficient de x^m est
$$u_m - u_{m-1} + p^r q\, u_{m-r-1}$$
   Or ce coefficient est nul car, à droite, le polynôme Q est de degré r. Cela prouve,
$$\forall m \geq r+1,\ u_m = u_{m-1} - p^r q\, u_{m-r-1}$$

   c. En développant le produit, il ne faut surtout pas oublier de tronquer en $o(x^r)$. On obtient
$$\left(\frac{p}{q} + p^r x^r + o(x^r)\right)\left(1 - x + p^r q x^{r+1}\right) = \frac{p}{q} - \frac{p}{q}x + p^r x^r + o(x^r)$$

3. Comme $G = \frac{Q}{B}$ avec $\deg(Q) \leq r$, le polynôme Q est la partie polynomiale du développement limité de BG à l'ordre r. On peut calculer car on connait le début du développement de G :
$$B(x)G(x) = \left(1 - x + p^r q x^{r+1}\right)\left(\frac{p}{q} + p^r x^r + o(x^r)\right)$$
$$\Rightarrow Q = \frac{p}{q}(1 - X) + p^r\, X^r$$
On en déduit l'expression de la fonction génératrice
$$G(x) = \frac{\frac{p}{q}(1-x) + p^r\, x^r}{1 - x + p^r q x^{r+1}} \Rightarrow G(1) = \frac{p^r}{p^r q} = \frac{1}{q}$$
En enlevant la partie conventionnelle $p_0 = \frac{p}{q}$ on trouve encore que
$$G(1) - p_0 = \frac{1}{q} - \frac{p}{q} = 1$$
Après un calcul sans grand intérêt, on trouve
$$G'(1) = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{p^r} - 1\right)$$
Si $r = 2$, on retrouve bien l'expression $\frac{1+p}{p^2}$ de la question I.4.b.