Problème 1

Ce texte est une introduction aux fonctions génératrices.

Préliminaire

1. Énoncer et démontrer une formule de Leibniz relative à la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Soit u un réel fixé non nul, écrire le développement limité en 0 à l'ordre n (entier quelconque) de
$$t \to \frac{1}{u-t}.$$

PARTIE I : Nombres de Fibonacci

On considère une fonction f définie dans un intervalle ouvert I contenant 0 par :
$$\forall t \in I, \quad f(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$
Cette fonction est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans son domaine, on note
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$
On définit aussi la suite de Fibonacci par les relations
$$\varphi_0 = \varphi_1 = 1, \quad \forall n \geq 2, \quad \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}.$$

1. Préciser l'intervalle I. Calculer f_0, f_1, f_2, f_3.
2. Montrer, en considérant $(1-t-t^2)f(t)$ que $\varphi_n = f_n$ pour tous les entiers n.
3. Montrer que $1 + \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n = \varphi_{n+2}$ pour tous les entiers n.
4. a. Calculer des réels u, v, α, β tels que
$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{1-t-t^2} = \frac{\alpha}{u-t} + \frac{\beta}{v-t}.$$
   b. Exprimer la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme combinaison linéaire de deux suites géométriques à préciser.

PARTIE II : Nombres de dérangements.

On définit une fonction g dans $I =]-\infty, 1[$ en posant
$$\forall t \in I, \quad g(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}.$$
Cette fonction est clairement $\mathcal{C}^\infty$, on pose $d_n = g^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

On appelle *dérangement* d'un ensemble E toute bijection σ de E dans E qui ne laisse fixe aucun point de E. C'est à dire $\sigma(\omega) \neq \omega$ pour tous les ω de E. On note δ_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. On pose arbitrairement $\delta_0 = 1$.

1. Calculer d_0, d_1, d_2, d_3.
2. Calculer δ_1, δ_2, δ_3.
3. Montrer, en considérant un développement limité de $e^t g(t)$, que pour tout entier n :
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\frac{d_k}{k!}.$$
4. Montrer que $\delta_n = d_n$ pour tout entier n.
5. Montrer les relations suivantes pour $n \geq 2$:
$$\delta_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right), \qquad \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{\delta_n}{n!} - \frac{\delta_{n-1}}{(n-1)!}.$$

PARTIE III : Nombres de partitions.

On définit une fonction h dans $\mathbb{R}$ en posant
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = e^{e^t - 1}.$$
Cette fonction est clairement $\mathcal{C}^\infty$, on pose $p_n = h^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

On rappelle qu'une *partition* d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes et dont l'union est E. On note π_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose arbitrairement $\pi_0 = 1$.

1. Calculer p_0, p_1, p_2, p_3.
2. Calculer π_1, π_2, π_3.
3. En utilisant h' et des développements limités, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k.$$
4. Montrer que $p_n = \pi_n$ pour tout entier n.

Problème 2

Dans ce problème[1], on considère une suite de lancers indépendants d'une même pièce, pouvant donner Face avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements
- F_n : le n-ième lancer a donné Face,
- P_n : le n-ième lancer a donné Pile.

Dans la première partie, on s'intéresse au numéro du lancer où, pour la première fois, on a obtenu deux Faces consécutifs. Dans la partie II, on généralise avec r lancers consécutifs donnant Face.

Préliminaires

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L} = (L_1, \cdots, L_n) \in \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$ et $m \geq n$. L'expérience aléatoire consiste à réaliser m lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir $\mathcal{L}$ lors des n premiers lancers ? Vérifier que cette probabilité est indépendante de m (toujours $\geq n$).
2. Soit a, b, c réels. Montrer que
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$
est inversible si et seulement si a, b, c sont deux à deux distincts.

I. Première obtention de deux Faces consécutifs.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement E_n dont la probabilité est notée p_n

E_n : « une suite de deux Faces consécutifs est obtenue pour la première fois à l'issue du n-ième lancer. »

1. Établissement d'une relation de récurrence.
   a. Préciser les événements E_1, E_2, E_3 et leurs probabilités p_1, p_2, p_3.
   b. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; E_{n+3} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{E_n} \cap \cdots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}$$
   c. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$
   d. En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; p_{n+3} = p_{n+2} - p^2 q p_n$$
   Quelle valeur doit-on conventionnellement attribuer à p_0 pour que la relation soit valable pour $n = 0$?
2. Suites et matrices.
   On considère dans cette question le polynôme $P = X^3 - X^2 + p^2 q$, l'ensemble U des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q \, u_n$$
   et la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p^2 q & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension. Préciser une base de U (nommée $\mathcal{B}$) dans laquelle la matrice du vecteur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
   $$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ définit un endomorphisme de U (nommé S) dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
   b. Former la division euclidienne de P par $X - p$. Montrer que P admet trois racines réelles p, r_1, r_2 avec $-1 < r_2 < 0 < r_1 < 1$.
   c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle non inversible ?
   d. Montrer que U admet une base (nommée $\mathcal{G}$) formée de suites géométriques sauf pour une valeur particulière de p à préciser. Quelle est la matrice de S dans cette base ? Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}$?
3. Expression des probabilités p_n.
   Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \; p_n = p^2 \, \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}$$
4. Temps d'attente moyen.
   a. Calculer la limite de $(\sum_{k=1}^{n} p_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b. Calculer la limite de $(\sum_{k=1}^{n} k p_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de p seulement (ni r_1 ni r_2 ne doivent figurer dans l'expression de la limite).

[1] d'après E.P.I.T.A. 2016 Épreuve optionnelle

II. Première obtention de r Faces consécutifs.

Dans cette partie $r \in N$ avec $r \geq 3$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement E_n dont la probabilité est notée p_n

> E_n : « une suite de r Faces consécutifs est obtenue pour la première fois à l'issue du n-ième lancer. »

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+r+1} = p^r q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$
En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+r+1} = p_{n+r} - p^r q p_n$$
Quelle valeur doit-on conventionnellement attribuer à p_0 pour que la relation soit valable pour $n = 0$?
2. Développements limités.
On considère le polynôme $B = 1 - X + p^r q\, X^{r+1}$ et un intervalle ouvert I contenant 0 dans lequel B ne s'annule pas.
   a. Justifier l'existence de I.
   b. Soit $F = \frac{Q}{B}$ avec $Q \in \mathbb{R}_r[X]$. Montrer que F (restreinte à I) admet des développements limités en 0 à tous les ordres. On note $u_0, u_1, \cdots$ les coefficients de ces développements :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ F(x) = u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n + o(x^n)$$
Montrer que
$$\forall m \geq r+1,\ u_m = u_{m-1} - p^r q\, u_{m-r-1}$$
   c. Former le produit des deux développements limités
$$\left(\frac{p}{q} + p^r x^r + o(x^r)\right)\left(1 - x + p^r q x^{r+1}\right)$$
3. Fonction génératrice.
Préciser le polynôme $Q \in \mathbb{R}_r[X]$ tel que, pour tout $n > r$, le développement limité en 0 à l'ordre n de $G = \frac{Q}{B}$ soit
$$G(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + o(x^n).$$
Calculer $G(1)$ et $G'(1)$.