Problème 1

I. Généralités

1. L'ensemble $\mathcal{X}_n$ s'identifie aux fonctions de $[\![1,n]\!]^2$ dans $\{0,1\}$, il est donc fini et de cardinal
$$2^{(n^2)}$$

2. Exprimons le déterminant avec des permutations
$$|\det(M)| = \left| \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j\in[\![1,n]\!]} m_{\sigma(j)j} \right| \leq \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} |\varepsilon(\sigma)| \prod_{j\in[\![1,n]\!]} |m_{\sigma(j)j}|$$
Tous les facteurs sont entre 0 et 1 donc tous les $n!$ termes de la somme sont plus petits que 1 d'où $|\det(M)| \leq 1$.

3. Soient A et B dans $\mathcal{Y}_n$ et λ entre 0 et 1. Considérons $M_\lambda = \lambda A + (1-\lambda)B$. Ses coefficients vérifient
$$\text{terme } i,j \text{ de } M_\lambda = \lambda a_{i,j} + (1-\lambda)b_{i,j} \in [0,1]$$
Donc $M_\lambda \in \mathcal{Y}_n$ ce qui prouve que $\mathcal{Y}_n$ est convexe.

4. Comme la colonne propre X est non nulle, il existe un indice i tel que $0 < |x_i| \geq |x_j|$ pour tous les autres j. On en déduit, en examinant la ligne i du produit MX :
$$|\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|m_{i,j}|}_{\leq 1} \underbrace{|x_j|}_{\leq |x_i|} \leq n|x_i| \Rightarrow |\lambda| \leq n$$
Si M est la matrice ne contenant que des 1 et X la colonne ne contenant que des 1, on a $MX = nX$. Il est donc possible d'obtenir des valeurs propres de module n.

5. a. Parmi les 16 matrices d'ordre 2 formées de 0 et de 1, on liste d'abord celles qui ne contiennent ni ligne ni colonne nulle en considérant les premières lignes possibles (il y en a 3) :
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
On élimine la dernière qui est de rang 1. Il en reste donc 6.
$$A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},$$

 b. Elles engendrent les matrices élémentaires car
$$E_{1,1} = E - A,\ E_{1,2} = D - I,\ E_{2,1} = C - I,\ E_{2,2} = B - A$$
Dans le cas général de l'ordre n. Si $i \neq j$, la matrice $I_n + E_{i,j}$ est une matrice d'opérations élémentaire donc dans $\mathcal{X}'_n$. Ceci montre que $E_{i,j} \in \operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n)$. Pour les $E_{i,i}$, on utilise la matrice D avec des 1 sur la « mauvaise » diagonale ($d_{i,j} = \delta_{n-j+1,i}$) car $D + E_{i,i}$ est encore inversible. On engendre ainsi tous les $E_{i,i}$ sauf $E_{p,p}$ lorsque $n = 2p+1$. On pourra également l'obtenir comme combinaison mais avec plus de deux matrices. La propriété reste donc vraie à l'ordre n. Par exemple
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = D + 2I - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
Le raisonnement est sans doute plus clair avec les matrices de permutations qui sont des éléments de $\operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n)$.
Pour n'importe quel couple (i,j), il existe des permutations σ telles que $\sigma(j) \neq i$. Le terme i,j de P_σ est alors nul. La matrice $P' = E_{ij} + P_\sigma$ est inversible car son déterminant est $\varepsilon(\sigma)$. En effet σ est la seule permutation qui contribue au déterminant à cause de la contrainte imposée par les $n-1$ colonnes (autres que la j-ème) qui ne contiennent qu'un seul terme non nul. De plus $P' \operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n)$ car elle ne contient que des 0 et des 1 don :
$$E_{ij} = P' - P_\sigma \in \operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n).$$

II. Maximisation du déterminant

1. Comme $\mathcal{X}_n$ est fini, l'ensemble des déterminants l'est aussi donc il admet un plus grand élément.
L'ensemble $\mathcal{Y}_n$ est infini donc on ne peut affirmer que l'ensemble des déterminants soit fini. En revanche, on sait d'après I.2. qu'il est majoré. Comme toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée il admet une borne supérieure y_n.

2. Le nombre y_{n+1} est un majorant de $\{\det(M), M \in \mathcal{Y}_n\}$. En effet, pour toute $M \in \mathcal{Y}_n$, on peut former une matrice $M' \in \mathcal{Y}_{n+1}$ de même déterminant en la bordant par des 0 avec seulement un 1 en position $1,1$. Comme y_n est le plus petit des majorants, on en déduit $y_n \leq y_{n+1}$.
3. Notons $X_1, \cdots, X_n$ les colonnes de la base canoniques des matrices colonnes et C la colonne qui ne contient que des 1. On peut alors écrire
$$C_j(J) = C - X_j$$
Développons le déterminant de M par multilinéarité par rapport aux colonnes. Seuls contribuent les distributions où C figure au plus une fois. On en déduit
$$\begin{aligned}\det(M) = (-1)^n \det(I) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \det(X_1, \cdots, X_{j-1}, C, X_{j+1}, \cdots, X_n)\\ = (-1)^{n-1}(n-1)\end{aligned}$$
Ces matrices montrent que la suite des y_n diverge vers $+\infty$ pour les n impairs. Pour les n pairs, il suffit de modifier la matrice en permutant deux lignes ou colonnes.
4. a. On suppose $n_{i_0,j_0} \in]0,1[$, considérons le développement du déterminant selon la colonne j_0. Dans ce développement, le coefficient n_{i_0,j_0} intervient seulement dans le terme
$$n_{i_0,j_0} C_{i_0,j_0}$$
où C_{i_0,j_0} désigne le cofacteur. Si ce cofacteur est positif ou nul, en remplaçant n_{i_0,j_0} par 1, on augmente le déterminant. Si le cofacteur est strictement négatif, en remplaçant cette fois n_{i_0,j_0} par 0 on l'augmente aussi. On peut donc former une matrice N' comme le demande l'énoncé.

   b. Pour une matrice M quelconque dans $\mathcal{Y}_n$, en procédant systématiquement comme dans la question précédente, on peut remplacer tous les coefficients dans l'intervalle ouvert par des 0 ou des 1 et obtenir finalement une matrice $M' \in \mathcal{X}_n$ telle que $\det(M) \leq \det(M')$. On en déduit que x_n est un majorant de y_n donc que $x_n = y_n$.

Problème 2

Le corrigé de mat6 est incomplet. Il manque la rédaction des questions « faciles ».

I. Convexité

1.
2.
3.
4. a. Montrons que e_1 est extrémal car le raisonnement sera le même pour e_2 et e_3. Supposons $e_1 \in [a,b]$ (c'est à dire combinaison convexe de a et b) avec $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$ dans $\mathcal{T}$ donc tous les a_i, b_j entre 0 et 1. Il s'agit de montrer que e_1 est $a$ou b.
Chaque coordonnée de e_1 est combinaison convexe des coordonnées correspondantes de a et b. Donc
$$1 \in [a_1, b_1] \Rightarrow 1 = b_1 \Rightarrow b = e_1 \text{ car } b_1 + b_2 + b_3 = 1 \text{ avec les } b_i \text{ entre 0 et 1.}$$
En fait on démontre aussi que $a = e_1$ avec $0 \in [a_2, b_2]$ et $0 \in [a_3, b_3]$.

   b. La condition $x_t \in \mathcal{T}$ se traduit par un système de 4 inégalités car la somme des coordonnées est toujours 1.
$$\left.\begin{aligned}0 \leq x_1 + t \leq 1\\ 0 \leq x_2 - t \leq 1\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow t \in [\max(-x_1, x_2 - 1), \min(x_2, 1 - x_1)]$$
$$\Leftrightarrow t \in [-\min(x_1, 1 - x_2), \min(x_2, 1 - x_1)]$$
Posons $\rho = \min(x_1, 1 - x_2, x_2, 1 - x_1) = \min(x_2, 1 - x_1)$ avec les hypothèses.
Alors $0 < t < \rho$ entraine x_t et x_{-t} dans $\mathcal{T}$ et différents de x. Or
$$x = \frac{1}{2} x_t + \frac{1}{2} x_{-t} \in]x_t, x_{-t}[$$
ce qui signifie que x n'est pas un point extrémal.

   c. Si x n'est pas un des e_i, au moins une de ses coordonnées est dans $]0,1[$. Il doit en exister une autre car la somme vaut 1. On se retrouve dans une situation analogue au a. ce qui entraine que x n'est pas extrémal. Le seuls points extrémaux sont donc les e_i.

II. Matrices bistochastiques

1. a.

   b.

2. a.
   b.
3. Opérations sur les matrices bistochastiques.
   a.
   b.
   c.
   d.
4. On veut montrer qu'une matrice de permutation est un point extrémal de l'ensemble des matrices bistochastiques.
   Montrons d'abord que la matrice identité (qui est une matrice de permutation particulière) est extrémale. Supposons $I \in [A, B]$ avec A et B bistochastiques et
   $$I = t\,A + (1-t)\,B \text{ avec } 0 \leq t \leq 1.$$
   On veut montrer que I est A ou B. Logiquement, cela revient à montrer
   $$B \neq I \Rightarrow A = I.$$
   Supposons $B \neq I$. Il existe i tel que $b_{ii} < 1$. Pour simplifier, on supposera $b_{11} < 1$.
   Comme 1 (terme 11 de I) est entre a_{11} et b_{11} et que a_{11} est entre 0 et 1, on a $a_{11} = 1$.
   La somme des termes de la première ligne ou de la première colonne de A vaut 1, donc $a_{11} = 1$ est le seul terme non nul de cette ligne et de cette colonne.
   Il s'agit de montrer que $t = 1$. Pour cela considérons le terme 11 de l'égalité matricielle
   $$\left.\begin{aligned} t &< 1 \\ b_{11} &< 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ta_{11} + (1-t)b_{11} = t + (1-t)b_{11} < t < 1$$
   en contradiction avec le fait que ce terme est égal au terme 11 de I c'est à dire 1. On en déduit $t = 1$ et $A = I$.
   Il reste à montrer que n'importe quelle matrice de permutation P_σ est extrémale.
   Soit $P_\sigma \in [A, B]$ avec A et B extrémales. On peut tout multiplier par la matrice de permutation inverse $P_{\sigma^{-1}}$. Donc $I \in [A', B']$ avec $A' = P_{\sigma^{-1}}\,A$ et $B' = P_{\sigma^{-1}}\,B$. Les matrices A' et B' sont bistochastiques comme produits de matrices bistochastiques (II.3.b). Comme I est extrémale, elle est égale à A' ou B'. Par exemple
   $$I = A' = P_{\sigma^{-1}}\,A \Rightarrow P_\sigma = A.$$
5. Étude de $\mathcal{E}$: matrices dont les sommes des termes par ligne et colonne sont nulles.
   a. On vérifie les propriétés assurant que $\mathcal{E}$ est un sous-espace et que Φ est linéaire.
   b. On veut montrer que Φ est injective. Soit $M \in \mathcal{E}$ dans $\ker \Phi$. Le bloc $(n-1)\times(n-1)$ en haut à gauche de M est nul. Comme pour les $n-1$ premières lignes, la somme des termes est nulle, on obtient que les $n-1$ premiers termes de la colonne n sont nuls. Le dernier terme de cette colonne est aussi nul car la somme est nulle. On raisonne de même avec les $n-1$ premières colonnes et on obtient que les $n-1$ premiers termes de la dernière ligne sont nuls. Ainsi M est la matrice nulle, ce qui assure l'injectivité de Φ.
   c. On veut montrer que Φ est surjective. Soit $A \in \mathcal{M}_{n-1}$ quelconque. On veut trouver $M \in E$ tel que $\Phi(M) = A$.
   Par définition, de Φ, le bloc en haut à gauche de M doit être A :
   $$\forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2,\ m_{ij} = a_{ij}.$$
   Il reste à définir $m_{1n}, \cdots, m_{n-1n}$, $m_{n1}, \cdots, m_{nn-1}$ et m_{nn}.
   On définit les premières valeurs avec les premières lignes et colonnes
   $$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ m_{kn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ki},\ m_{nk} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}.$$
   On peut définir m_{nn} avec la dernière ligne :
   $$m_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}.$$
   Mais il faut alors vérifier que la somme des termes de la dernière colonne est bien nulle.
   $$\sum_{k=1}^{n} m_{kn} = \sum_{k=1}^{n}\left(-\sum_{i=1}^{n-1} a_{ki}\right) = -\sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\right)}_{=0} = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{E}.$$
   d. Comme Φ est un isomorphisme, il conserve la dimension donc $\dim(\mathcal{E}) = (n-1)^2$.
6. a. Soit B bistochastique avec $2n$ coefficients non nuls. Il existe donc $2n$ couples (i,j) tels que $b_{ij} \neq 0$. Notons V le sous-espace vectoriel engendré par les matrices élémentaires E_{ij} attachées à ces couples. Par définition $\dim V = 2n$. Donc :
   $$\dim \mathcal{E} + \dim V = (n-1)^2 + 2n = n^2 + 1 > n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que $\mathcal{E} \cap V$ ne se réduit pas à la matrice nulle. Notons E une matrice non nulle dans cette intersection et posons $B_t = B + tE$. Les matrices B et B_t coincident pour tous les couples d'indices sauf sur les $2n$ couples (i,j) pour lesquels $b_{ij} > 0$. Pour un tel couple, le terme i,j de B_t est $b_{ij}+t$. Il existe donc un intervalle ouvert contenant 0 assez petit pour que tous ces termes soient strictement positifs. Comme $B \in \mathcal{E}$ les sommes des termes des lignes et des colonnes sont les mêmes pour B et B_t donc B_t est bien bistochastique. On a alors

$$B = \frac{1}{2}B_t + \frac{1}{2}B_{-t} \Rightarrow B \in]B_t, B_{-t}[$$

Ce qui entraine que B n'est pas extrémale.

b. Soit B bistochastique avec au plus $2n-1$ coefficients non nuls. Il existe donc une colonne j contenant au plus un coefficient $b_{ij} \neq 0$. Comme la somme des termes de la colonne j est 1, on a $b_{ij} = 1$. La somme des termes de la ligne i vaut 1 donc tous les autres b_{ik} sont nuls.

7. Pour montrer que toute matrice bistochastique extrémale est une matrice de permutation, on raisonne par récurrence sur la taille n des matrices. On a vu que la propriété est vraie pour $n = 2$.
Considérons une matrice $n \times n$ bistochastique extrémale. D'après 6.a. elle admet au plus $2n-1$ coefficients non nuls et d'après 6.b. il existe un couple (i,j) tel que $b_{ij} = 1$ soit le seule terme non nulde la ligne i et de la colonne j.
Notons B' la matrice extraite obtenue à partir de B en supprimant la ligne i et la colonne j. Par construction, elle est toujours bistochastique et extrémale mais de taille $(n-1)\times(n-1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, B' est une matrice de permutation. Donc B' admet un seul terme égal à 1 par ligne et par colonne. La matrice complète B vérifie aussi cette propriété donc c'est une matrice de permutation.

III. Majorisation

1. Par définition de S_X,

$$\begin{aligned} X \in S_Y &\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } X = P_\phi Y \Leftrightarrow \exists \phi \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } X = \underbrace{P_\phi P_{\sigma^{-1}}}_{=P_{\phi\circ\sigma^{-1}}} P_\sigma Y \\ &\Leftrightarrow \exists \phi' \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } X = P_{\phi'} P_\sigma Y \Leftrightarrow X \in S_{P_\sigma Y}. \end{aligned}$$

On en déduit $S_Y = S_{P_\sigma Y}$ donc $C_Y = C_{P_\sigma Y}$.
Si X est une combinaison convexe de $P_\sigma Y$, alors $P_\theta X$ est aussi une combinaison convexe de permutés de Y car pour chaque σ, $P_\theta P_\sigma Y = P_\phi Y$ avec $\phi = \theta \circ \sigma$. On en déduit

$$X \in C_Y \Leftrightarrow P_\theta X \in C_Y = C_{P_\sigma Y}.$$

2. Il s'agit simplement de la définition de C_Y comme ensemble des combinaisons complexes des permutés de Y. Pour chaque permutation σ, $\pi(\sigma)$ est le coefficient du $P_\sigma Y$ dans la combinaison. Par linéarité, posons

$$B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \pi(\sigma) P_\sigma.$$

Quels sont les σ qui contribuent au terme b_{ij} ? Uniquement ceux tels que $\sigma(j) = i$. On en déduit

$$b_{ij} = \sum_{\sigma \text{ tq } \sigma(j)=i} \pi(\sigma).$$

3. D'après la question 1., on ne change pas une relation $X \in C_Y$ en multipliant X et Y par des matrices de permutations. On peut permuter les coefficients de X et de Y pour les ranger par ordre décroissant.

4. a. On suppose $X = BY$ avec B bistochastique. Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{j} x_k = \sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{n} b_{ki} y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j} b_{ki}\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \text{ avec } c_i = \sum_{k=1}^{j} b_{ki}.$$

Avec les notations de l'énoncé,

$$\sum_{k=1}^{j} x_k = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \text{ avec } c_k = \sum_{i=1}^{j} b_{ik}.$$

Les c_k sont positifs car B est positive et $c_k = \sum_{i=1}^{j} b_{ik} \leq \sum_{i=1}^{n} b_{ik} = 1$. De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} b_{ik} = \sum_{i=1}^{j}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{ik}}_{=1} = j.$$

b. La relation que l'énoncé nous conseille de considérer est vraie car la parenthèse à droite du y_j est nulle à cause la question précédente $\sum_{k=1}^{n} c_k = j$. Suivons le conseil.

$$\sum_{k=1}^{j} x_k - \sum_{k=1}^{j} y_k = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k + y_j \left(- \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \right) + j \right) - \sum_{k=1}^{j} y_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k (y_k - y_j) + \sum_{k=1}^{j} (y_j - y_k) = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{(c_k - 1)}_{\leq 0} \underbrace{(y_k - y_j)}_{\geq 0} + \sum_{k=j+1}^{n} c_k \underbrace{(y_k - y_j)}_{\leq 0} \leq 0$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{j} x_k \leq \sum_{k=1}^{j} y_k.$$

Ceci étant valable pour tous les j, on a bien $X \prec Y$.

c. On a vu en question 2 que $X \in C_Y$ entraine qu'il existe B bistochastique telle que $X = BY$. La question précédente entraine $X \prec Y$.

5. a. Si X et Y sont deux colonnes égales sauf pour un seul indice, ils ne peuvent avoir la même somme de termes. Ici, la somme des termes de X et Y sont égales à 1 donc $X \neq Y$ entrainent qu'au moins deux des coefficients sont distincts donc $p \geq 2$.

b. Par définition i et j sont le plus petit et le plus grand des k tels que $a_k \neq b_k$ donc $i < j$ car il existe au moins deux de ces k.
Si $i = 1$ alors $x_1 \leq y_1$ donc $x_i < y_i$. Si $i > 1$, on a

$$\left. \begin{aligned} k < i \Rightarrow x_k = y_k \\ x_1 + \cdots + x_i \leq y_1 + \cdots + y_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_i \leq y_i \Rightarrow x_i < y_i \text{ car } x_i \neq y_i.$$

De l'autre côté,

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \cdots + x_{j-1} \leq y_1 + \cdots + y_{j-1} \\ x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_j + \cdots + y_n \leq x_j + \cdots + x_n$$
$$\Rightarrow \; y_j \leq x_j \text{ car } k > j \Rightarrow x_k = y_k \Rightarrow y_j < x_j \text{ car } x_j \neq y_j.$$

En utilisant la décroissance des x et des y, il vient

$$y_j < x_j \leq x_i < y_i.$$

c. Comme x_i est entre y_j et y_i, on peut l'écrire comme une combinaison convexe.

$$x_i = \lambda y_i + (1 - \lambda) y_j \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_i - y_j}{y_i - y_j} \in]0, 1[\,.$$

On pose $B_\lambda = \lambda I_n + (1 - \lambda) P_{(ij)}$ et $Y' = B_\lambda Y$.
Les coefficients de Y' sont égaux à ceux de Y sauf pour les indices i et j :

$$y'_i = \lambda y_i + (1 - \lambda) y_j, \; y'_j = \lambda y_j + (1 - \lambda) y_i.$$

Avec $y'_i = x_i$ par choix du λ et

$$y'_j = y_i + \lambda(y_j - y_i) = y_i - x_i + y_j \Rightarrow x_i - y_i + y'_j - y_j = 0.$$

Cette dernière relation servira plus loin Examinons les sommes partielles en supposant $i < j$:

$$l < i \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} y'_k = \sum_{k=1}^{l} y_k \geq \sum_{k=1}^{l} x_k.$$

Pour la somme jusqu'à i utilisons que $y'_i = x_i$:

$$\sum_{k=1}^{i} y'_k = \sum_{k=1}^{i-1} y_k + y'_i = \sum_{k=1}^{i-1} y_k + x_i \geq \sum_{k=1}^{i-1} x_k + x_i = \sum_{k=1}^{i} x_k.$$

Pour les sommes jusqu'à $j - 1$ l'inégalité est valable car les nouveaux y'_k sont égaux au y_k. Examinons la somme jusqu'à j.

$$\sum_{k=1}^{j} y'_k = \sum_{k=1}^{j} y_k + \underbrace{x_i - y_i + y'_j - y_j}_{=0} = \sum_{k=1}^{j} y_k \geq \sum_{k=1}^{j} x_k.$$

On a bien vérifié que $X \prec Y'$ le nombre de k tels que $x_k \neq y'_k$ est strictement plus petit que p à cause de $y'_i = x_i$.

6. On peut proposer une démonstration algorithmique de l'implication $X \prec Y \Rightarrow X \in C_Y$ en utilisant la question précédente. Il existe des matrices bistochastiques $B_1, B_2, \cdots$ et des colonnes $Y_1 = B_1 Y$, $Y_2 = B_2 Y_1$ telles $X \prec Y_k$ tant que $X \neq Y_k$. Le nombre d'indices distincts décroit strictement donc il existe un k tel que

$$X = Y_k = B_k \, B_{k-1} \, \cdots \, B_1 \, Y$$

avec $B = B_k \, B_{k-1} \, \cdots \, B_1$ bistochastique (produit de matrices bistochastiques) donc $X \in C_Y$.