Problème 1

Cet exercice[1] porte sur les déterminants des matrices à coefficients dans $\{0,1\}$. Dans ce texte, n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note :

- $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$,
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$,
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$,

I. Généralités

1. Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et préciser son cardinal.
2. Démontrer que $|\det(M)| < n!$ pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$.
3. Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M c'est à dire
$$\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ tq } MX = \lambda X.$$
Montrer que $|\lambda| \leq n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.
4. Étude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.
   a. Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$.
   b. Montrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre $\mathcal{M}_2$. La propriété $\operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n) = \mathcal{M}_n$ est-elle vraie pour $n \geq 2$?

II. Maximisation du déterminant

1. Justifier l'existence de
$$x_n = \max\{\det(M), M \in \mathcal{X}_n\} \qquad y_n = \sup\{\det(M), M \in \mathcal{Y}_n\}.$$
2. Montrer que la suite $(y_k)_{k\geq 2}$ est croissante.
3. Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$. calculer $\det(M)$ et en déduire que $(y_k)_{k\geq 2}$ tend vers $+\infty$.
4. Soit $N \in \mathcal{Y}_n$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $n_{i,j}$ les coefficients de N et supposons que pour un (i_0,j_0) fixé on ait $0 < n_{i_0,j_0} < 1$.
   a. Montrer qu'en remplaçant n_{i_0,j_0} soit par 0 soit par 1, on peut obtenir une matrice $N' \in \mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leq \det(N')$.
   b. Montrer que $x_n = y_n$.

[1] d'après Math 1 PSI Concours Centrale-Supelec 2016

Problème 2

Dans ce texte[2], n désigne un naturel supérieur ou égal à 2.
Une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *bistochastique* si et seulement si ses coefficients sont dans $[0,1]$ et toutes les sommes par ligne et par colonne sont égales à 1 c'est à dire
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, b_{ij} \in [0,1] \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} b_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} = 1.$$
Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on désigne par P_σ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ terme } i,j \text{ de } P_\sigma = \delta_{i\sigma(j)}.$$
On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des matrices bistochastiques. On définit aussi une matrice ligne et une matrice colonne particulières :
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}), \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

I. Convexité

On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Soit $p \geq 2$ entier naturel et $u_1, \cdots, u_p$ des vecteurs E. Les vecteurs
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \qquad \text{avec } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \text{ et } (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in [0,1]^p$$
sont appelés des *combinaisons convexes* de $u_1, \cdots, u_p$.
On note $\mathcal{C}(\{u_1, \cdots, u_p\})$ l'ensemble des combinaisons convexes des vecteurs $u_1, \cdots, u_p$. On admet que c'est une partie convexe.
Dans le cas particulier de deux vecteurs, on note $[u_1, u_2] = \mathcal{C}(u_1, u_2)$.
On dit qu'une partie Ω de E est convexe si et seulement si
$$\forall (u,v) \in \Omega^2, \ [u,v] \subset \Omega\,.$$
Soit Ω une partie convexe de E et $u \in \Omega$. On dit que $u \in \Omega$ est un *point extrémal* de Ω si et seulement si
$$\forall (a,b) \in \Omega^2, \ u \in [a,b] \Rightarrow u \in \{a,b\}\,.$$

[2] tiré de *The Cauchy-Schwarz Master Class*

1. Montrer que, pour tous u et v dans E,
$$[u,v] = [v,u] = \{\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda \in [0,1]\} = \{\mu v + (1-\mu)u, \mu \in [0,1]\}.$$
2. Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note
$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1),\ \mathcal{T} = \mathcal{C}(e_1,e_2,e_3).$$
Montrer que
$$(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1,x_2,x_3) \in [0,1]^3 \\ x_1+x_2+x_3 = 1. \end{cases}.$$
3. Montrer qu'une partie convexe Ω de E est stable par combinaisons convexes. C'est à dire que, pour tout $p \geq 2$ et tous vecteurs $u_1, \cdots, u_p$ de Ω, les combinaisons convexes de ces vecteurs sont encore dans Ω.
4. On reprend l'exemple de la question 2.
   a. Montrer que e_1, e_2, e_3 sont des points extrémaux de $\mathcal{T}$.
   b. Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{T}$ avec $0 < x_2 \leq x_1 < 1$ et
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ x_t = (x_1+t, x_2-t, x_3).$$
   Montrer qu'il existe des t non nuls tels que x_t et x_{-t} soient dans $\mathcal{T}$. En déduire que x n'est pas un point extrémal de $\mathcal{T}$.
   c. Montrer que si x est un point extrémal de $\mathcal{T}$ alors c'est l'un des e_i.

II. Matrices bistochastiques

1. a. Soit σ et θ dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $P_\theta\, P_\sigma = P_{\theta\circ\sigma}$, ${}^tP_\theta = P_{\theta^{-1}}$. Que vaut $\det P_\sigma$?
   b. Montrer que les matrices de permutation sont bistochastiques.
2. Dans cette question, toutes les matrices sont 2×2.
   a. Préciser la forme des matrices bistochastiques. Quelles sont les matrices de permutation ?
   b. Soit B bistochastique qui n'est pas une matrice de permutation. Former B_1 et B_2 bistochastiques telles que
   $$B = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 \text{ avec } B_1 \neq B \text{ et } B_2 \neq B.$$
   En déduire que toute matrice bistochastique extrémale est une matrice de permutation.
3. Opérations sur les matrices bistochastiques.
   a. Soit B bistochastique et Y une matrice colonne dont la somme des termes vaut 1. Montrer que BY une matrice colonne dont la somme des termes vaut 1.
   b. Montrer qu'une matrice B à coefficients positifs est bistochastique si et seulement si $L\,B = L$ et $B\,C = C$.
   c. Montrer que le produit de matrices bistochastiques est bistochastique.
   d. Montrer qu'une combinaison convexe de matrices bistochastiques est bistochastique. En déduire que l'ensemble $\mathcal{B}$ des matrices bistochastique est convexe.
4. Montrer qu'une matrice de permutation est un point extrémal de $\mathcal{B}$.
5. Notons $\mathcal{E}$ la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée par les matrices M dont la somme des termes par ligne et par colonne est toujours nulle et considérons l'application Φ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui à une matrice M associe la matrice extraite obtenue en supprimant la ligne n et la colonne n.
   a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que Φ est linéaire.
   b. Montrer que Φ est injective.
   c. Montrer que Φ est surjective.
   d. En déduire $\dim(\mathcal{E}) = (n-1)^2$.
6. a. Soit B bistochastique avec $2n$ coefficients non nuls. Montrer qu'il existe $E \in \mathcal{E}$ telle que $B_t = B + tE$ soit bistochastique pour $|t|$ assez petit. En déduire que B n'est pas extrémale.
   b. Soit B bistochastique avec au plus $2n-1$ coefficients non nuls. Montrer qu'il existe i et j tels que $b_{ij} = 1$ soit le seul terme non nul de la ligne i et de la colonne j.
7. Montrer que tout point extrémal de l'ensemble des matrices bistochastiques est une matrice de permutation.

III. Majorisation

On se place dans l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}([0,1])$ pour lesquelles la somme des termes vaut 1.
Pour une telle matrice colonne X, notons $S_X = \{P_\sigma\, X, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ et $C_X = \mathcal{C}(S_X)$.
Par définition, S_X et C_X sont des parties de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On admet que C_X est convexe.

1. Justifier que S_X est fini. Majorer son cardinal. Soit θ et σ dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que
$$X \in C_Y \Rightarrow P_\theta\, X \in C_{P_\sigma\, Y}.$$

2. Soit Y une colonne et $X \in C_Y$. Montrer qu'il existe une fonction π de $\mathfrak{S}_n$ dans $[0,1]$ telle que
$$X = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \pi(\sigma)\, P_\sigma\, Y \quad \text{avec} \quad \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \pi(\sigma) = 1.$$
En déduire qu'il existe une matrice bistochastique B telle que $X = BY$. Que vaut le terme d'indice i, j de B ?

3. On souhaite étudier si $X \in C_Y$. Justifier que l'on peut supposer
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \ \text{ et } y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n.$$
Dans toute la suite, les colonnes X et Y vérifient ces propriétés. Ne pas oublier que l'on a aussi
$$x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 1.$$

4. a. On suppose qu'il existe une matrice bistochastique B telle que $X = BY$. Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, préciser les réels $c_1, \cdots, c_n$ tels que
$$\sum_{k=1}^{j} x_k = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k.$$
Vérifier que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq c_k \leq 1$ et $\sum_{k=1}^n c_k = j$.

   b. On suppose toujours $X = BY$ avec B bistochastique. Montrer que
$$\forall j \in [\![1, n-1]\!], \qquad \sum_{k=1}^{j} x_k \leq \sum_{k=1}^{j} y_k.$$
On note $X \prec Y$ cette propriété et on dit alors que Y *majorise* X. Pour le montrer on peut considérer
$$\sum_{k=1}^{j} x_k - \sum_{k=1}^{j} y_k = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k + y_j \left(- \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \right) + j \right) - \sum_{k=1}^{j} y_k.$$

   c. En déduire $X \in C_Y \Rightarrow X \prec Y$.

5. On suppose que $X \prec Y$. C'est à dire que
$$\forall l \in [\![1, n-1]\!], \qquad \sum_{k=1}^{l} x_j \leq \sum_{k=1}^{l} y_j.$$
On suppose aussi $X \neq Y$ et on note p le nombre d'indices k tels que $x_k \neq y_k$.

   a. Montrer que $p \geq 2$.

   b. On définit i et j comme le plus petit et le plus grand des k tels que $x_k \neq y_k$. Montrer que $i < j$ et $y_j < x_j \leq x_i < y_i$.

   c. Préciser $\lambda \in [0,1]$ tel que $x_i = \lambda y_i + (1-\lambda) y_j$. On pose
$$B_\lambda = \lambda I_n + (1-\lambda) P_{(ij)} \ \text{ et } \ Y' = B_\lambda Y.$$
Montrer que $X \prec Y'$ et que le nombre d'indices k tels que $x_k \neq y'_k$ est strictement plus petit que p.

6. Montrer que $X \prec Y$ entraine $X \in C_Y$.