Problème

Les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{C}^p$ sont toujours relatives à la base canonique. La i-ème coordonnée de $(x_1, \cdots, x_p)$ est donc x_i.

Partie I. Boîte à outils.

1. a. Par linéarité de f :

$$\forall z = (z_1, \cdots, z_n) \in F,\ f(z) = \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i1} z_i, \cdots, \sum_{i=1}^{p} a_{ip} z_i\right).$$

b. Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, comme $f(e_i) \in \mathcal{Q}^+$, les a_{ij} sont strictement positifs par définition de $\mathcal{Q}^+$.
Comme, $f(u) = u$ avec $u = (1, \cdots, 1)$. D'après l'expression de $f(z)$:

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ \sum_{i=1}^{p} a_{ij} = j\text{-ème coordonnée de } f(u) = 1.$$

2. Pour k fixé, d'après les propriétés des suites usuelles :

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots}^{k \text{ facteurs}}}{k!} \Rightarrow \left(\binom{n}{k}\lambda^n\right)_{n\geq p} \sim \frac{n^k}{k!}\lambda^n \to 0 \text{ car } |\lambda| < 1.$$

3. On rappelle que $\lambda_i > 0$ pour tous les i avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$.

a. Ici tous les λ et μ sont positifs ou nuls. Donc

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i \mu_i \leq \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_p\mu_p.$$

Cela est vrai en particulier pour l'indice i_0 tel que $\mu_{i_0} = \max(\mu_1, \cdots, \mu_p)$, donc

$$\underbrace{\min(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)}_{\leq \lambda_{i_0}} \underbrace{\max(\mu_1, \cdots, \mu_p)}_{\geq 0} \leq \lambda_{i_0} \max(\mu_1, \cdots, \mu_p) = \lambda_{i_0}\mu_{i_0}$$
$$\leq \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_p\mu_p$$

Si on suppose de plus que la somme des $\lambda\mu$ est nulle, on en déduit

$$0 \leq \underbrace{\min(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)}_{>0} \underbrace{\max(\mu_1, \cdots, \mu_p)}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow \max(\mu_1, \cdots, \mu_p) = 0$$
$$\Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_p = 0.$$

Pour la deuxième implication, on écrit 1 comme somme des λ et on se ramène à la première

$$\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_p\mu_p = 1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p \Rightarrow \lambda_1\underbrace{(1-\mu_1)}_{\geq 0} + \cdots + \lambda_p\underbrace{(1-\mu_p)}_{\geq 0} = 0$$
$$\Rightarrow 1 - \mu_1 = \cdots = 1 - \mu_p = 0.$$

b. Ici les $u_i \in \mathbb{C}$. Notons $\mu_i = \mathrm{Re}(u_i)$ et considérons la partie réelle de la combinaison :

$$\left.\begin{aligned} \forall i \in [\![1,p]\!], \mathrm{Re}(u_i) \leq |\mathrm{Re}(u_i)| \leq |u_i| \Rightarrow \mu_i \leq 1 \\ \mathrm{Re}\left(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p\right) = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_p\mu_p = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_p = 1$$

d'après l'implication précédente. On conclut alors par

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(u_i) = 1 \\ |\mathrm{Re}(u_i)| \leq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}(u_i) = 0 \text{ et } u_i = 1.$$

Partie II. Valeurs propres complexes.

1. Pour $p = 2$, en se limitant à $\mathbb{R}^2$, on trouve le carré unité : les 4 segments pour $\mathcal{N}$ et la plaque pour $\mathcal{B}$.
2. Par définition $f(u) = u$ ce qui signifie que 1 est valeur propre de vecteur propre u. L'ensemble $\mathcal{S}$ des valeurs propres de f (appelé son *spectre*) est non vide, il contient au moins 1.
3. On veut montrer que le module d'une valeur propre est inférieure ou égale à 1.

a. Soit w un vecteur propre de valeur propre λ et $\mu \in \mathbb{C}$ non nul.
Notons $v = \mu w \neq 0_F$. C'est encore un vecteur propre car

$$f(v) = f(\mu w) = \mu f(w) = \mu(\lambda w) = \lambda(\mu w) = \lambda v.$$

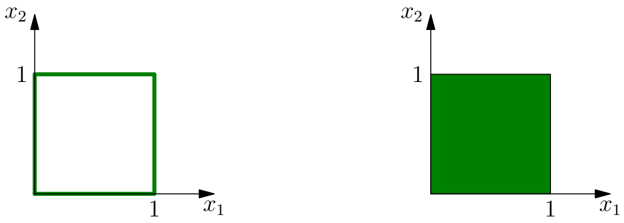

FIG. 1: $\mathcal{N}\cap\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}\cap\mathbb{R}^2$

b. Soit $w=(z_1,\cdots,z_p)\in\mathcal{B}$. Par linéarité de f, la j-ème coordonnée de $f(w)$ est $a_{1j}v_1+\cdots+a_{pj}v_p$ avec

$$|\underbrace{a_{1j}}_{>0}z_1+\cdots+\underbrace{a_{pj}}_{>0}z_p|\leq a_{1j}\underbrace{|z_1|}_{\leq 1}+\cdots+a_{pj}\underbrace{|z_p|}_{\leq 1}\leq a_{1j}+\cdots+a_{pj}=1$$

d'après I1b. Ceci étant valable pour tous les j, on en tire $f(v)\in\mathcal{B}$.

c. Soit $w=(z_1,\cdots,z_p)$, notons $W=\max(|z_1|,\cdots,|z_p|)$. Alors $w\neq 0_F\Rightarrow W>0$. Il suffit de choisir $\mu=\frac{1}{W}$ pour que $\mu\,w\in\mathcal{N}$.

d. Soit λ une valeur propre. D'après c. et a., il existe $w=(z_1,\cdots,z_p)\in\mathcal{N}$ qui est un vecteur propre de valeur propre λ. Comme $\mathcal{N}\subset\mathcal{B}$, la question b. montre que

$$\lambda w=f(w)\in\mathcal{B}\Rightarrow\forall j\in[\![1,p]\!],\ |\lambda z_j|\leq 1.$$

Il existe un j tel que $|z_j|=1$ car $w\in\mathcal{N}$. On en déduit $|\lambda|\leq 1$.

4. Soit λ une valeur propre de module 1.

a. Comme dans la question précédente, il existe $w=(z_1,\cdots,z_p)\in\mathcal{N}$ (d'après 3.c. et 3.a.) qui est un vecteur propre de valeur propre λ.

b. Il existe j tel que $|z_j|=1$ et $|z_i|\leq 1$ pour tous les i car $w=(w_1,\cdots,w_p)\in\mathcal{N}$. Considérons la j-ème coordonnée de $f(w)$:

$$a_{1j}z_1+\cdots+a_{pj}z_p=\lambda z_j.$$

Divisons par λz_j qui est non nul car de module 1. On en tire

$$a_{1j}u_1+\cdots+a_{pj}u_p=1 \text{ avec } u_k=\frac{z_k}{\lambda z_i}\Rightarrow|u_k|=\frac{|z_k|}{|\lambda z_i|}\leq 1.$$

On conclut alors que $u_k=1$ pour tous les k avec la question I.3.b. car

$$a_{1j}+\cdots+a_{pj}=1.$$

En considérant $k=j$, on obtient $\lambda=1$. Ceci prouve que 1 est *la seule valeur propre de module 1*. Pour tous les autres k, on obtient $z_k=z_j$.
On peut noter que cela entraine $w=z_ju$ ce qui est utile dans la question suivante.

c. Remarquons que $v\in\ker(f-\mathrm{Id}_F)\Leftrightarrow f(v)=v$. Comme $f(u)=u$ par hypothèse, $u\in\ker(f-\mathrm{Id}_F)$ donc $\mathrm{Vect}(u)\subset\ker(f-\mathrm{Id}_F)$.
Soit v non nul dans $\ker(f-\mathrm{Id}_F)$. D'après 3.c. et 3.a., il existe $\mu>0$ tel que $\mu v=(z_1,\cdots,z_p)$ soit un vecteur propre dans $\mathcal{N}$ de valeur propre 1. D'après la question précédente, il existe j tel que $\mu v=z_iu\in\mathrm{Vect}(u)$. On en tire l'autre inclusion donc

$$\ker(f-\mathrm{Id}_F)=\mathrm{Vect}(u).$$

Partie III. Hyperplan supplémentaire stable.

1. a. Si $g(x)=0$ alors $g^(x)=0$ donc $\ker g\subset\ker g^2$ donc $\dim(\ker g)\leq\dim(\ker g^2)$.
Pour la deuxième inégalité, considérons g' la restriction de g à $\ker g^2$. Elle prend ses valeurs dans $\ker g$ donc $\mathrm{rg}\,g'\leq\dim(\ker g)$ et son noyau est $\ker g$. Appliquons à g' le théorème du rang :

$$\dim(\ker g^2)=\dim(\ker g)+\mathrm{rg}(g')\leq 2\dim(\ker g).$$

b. On sait que $\ker g\subset\ker g^2$ et $\operatorname{Im} g^2\subset\operatorname{Im} g$ pour tout endomorphisme g.

– Supposons $\operatorname{Im} g\oplus\ker g=E$ et montrons que $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Im} g^2$.
Soit $x=g(y)\in\operatorname{Im} g$, décomposons y en $y=a+b$ avec $a\in\ker g$ et $b=g(c)\in\operatorname{Im} g$. On en tire $x=g^2(c)\in\operatorname{Im} g^2$ donc $\operatorname{Im} g=\operatorname{Im} g^2$.

– Supposons $\operatorname{Im} g=\operatorname{Im} g^2$ et montrons que $\ker g=\ker g^2$.
L'égalité des deux images entraine l'égalité des dimensions des deux images. Le théorème du rang entraine l'égalité des dimensions des deux noyaux. Comme $\ker g\subset\ker g^2$, l'égalité des dimensions entraine l'égalité des espaces.

– Supposons $\ker g^2=\ker g$ et montrons que $\operatorname{Im} g\oplus\ker g=E$.
Si $x\in\operatorname{Im} g\cap\ker g$, il existe y tel que $x=g(y)$ et $g(x)=0$. Alors $g^2(y)=0$ donc $y\in\ker g^2\subset\ker g$ donc $g(y)=x=0$. L'intersection est réduite au vecteur nul donc $\dim(\operatorname{Im} g+\ker g)=\dim\operatorname{Im} g+\dim\ker g=\dim E$ à cause du théorème du rang. D'où $\operatorname{Im} g+\ker g=E$ puis $\operatorname{Im} g\oplus\ker g=E$.

Les trois implications prouvées au dessus montrent circulairement l'équivalence

$$\operatorname{Im} g \oplus \ker g = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \ker g^2 = \ker g.$$

2. Notons $g = f - \operatorname{Id}_F$ de sorte que $f = \operatorname{Id}_F + g$. La formule du binôme est valable pour une somme de deux endomorphismes qui commutent :

$$f^n = \operatorname{Id}_F + \binom{n}{1} g + \binom{n}{2} g^2 + \binom{n}{3} g^3 + \cdots$$

On sait d'après II.4.c que $\ker g = \operatorname{Vect}(u)$ donc $\dim(\ker g) = 1$. Si $\dim(\ker g^2) = 2$ l'inclusion entre les deux noyaux est stricte et il existe un $w \in \ker g^2$ avec $w \notin \ker g$. On a donc $f(w) \neq w$ et $g^2(w) = 0$. Le vecteur v n'est pas forcément dans $\mathcal{B}$ mais, comme il est non nul, il existe $\mu > 0$ tel que $v = \mu w = (z_1, \cdots, z_p) \in \mathcal{N} \subset \mathcal{B}$ et qui vérifie les mêmes propriétés. L'expression de $f^n(v)$ se réduit alors à

$$f^n(v) = v + \binom{n}{1} g(v) + 0 = v + n(f(v) - v).$$

Ceci entre en contradiction avec le fait que $\mathcal{B}$ est stable par f (partie II question III.b). En effet il existe un indice j tel que la j-ème coordonnée de v soit différente de la j-ème coordonnée de $f(v)$. Pour ce j, la suite des j-ème coordonnés de $f^n(v)$ va diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$ et ne sera pas bornée par 1. Ceci prouve que $\ker g^2 = \ker g$.

3. Toujours avec $g = f - \operatorname{Id}_F$, la question 1.a. montre que

$$\ker(f - \operatorname{Id}_F)^2 = \ker(f - \operatorname{Id}_F) \Rightarrow \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_F) \oplus \ker(f - \operatorname{Id}_F) = E.$$

Comme $\ker(f - \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Vect}(u)$ est une droite vectorielle, $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_F)$ est un hyperplan supplémentaire noté H.
Il est stable par f car si $x \in H$, il existe $y \in F$ tel que

$$x = f(y) - y \Rightarrow f(x) = f^2(x) - f(x) = (f - \operatorname{Id}_F)(f(x)) = g(x) \in H.$$

4. a. Il s'agit d'une question de cours. Soit v un vecteur qui n'est pas dans l'hyperplan $\ker \phi = \ker \psi$ alors $\psi(v)$ et $\phi(v)$ sont non nuls et la droite $\operatorname{Vect}(v)$ est un supplémentaire de cet hyperplan. En décomposant dans $\ker \psi \oplus \operatorname{Vect}(v)$, on vérifie que $\phi = \frac{\phi(v)}{\psi(v)} \psi$.
   b. Comme H est un hyperplan, il existe une forme linéaire γ_1 telle que $H = \ker \gamma_1$ avec $\gamma_1(u) \neq 0$ car u n'est pas dans H. On peut poser $\gamma = \frac{1}{\gamma_1(u)} \gamma_1$ pour assurer que $\gamma(u) = 1$.
   Notons $\gamma' = \gamma \circ f$. C'est encore une forme linéaire et elle n'est pas nulle car $\gamma'(u) = 1$. La stabilité de H par f entraine que $H \subset \ker \gamma'$. Comme il sont de même dimension, les deux hyperplans sont égaux. Il existe donc un réel λ tel que $\gamma' = \lambda \gamma$. De plus $\lambda = 1$ car $\gamma(u) = \gamma'(u)$.
   c. Décomposons $v \in F$ dans $\operatorname{Vect}(u) \oplus H$. Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $h \in H = \ker \gamma$ tel que

$$v = \lambda u + h \Rightarrow \gamma(v) = \lambda \gamma(u) \Rightarrow p_{\operatorname{Vect}(u)\, H}(v) = \lambda u = \gamma(v) u \text{ car } \gamma(u) = 1.$$

Partie IV. Convergence.

1. Utilisons la formule du binôme pour l'endomorphisme

$$f^n = (\lambda \operatorname{Id}_F + (f - \lambda \operatorname{Id}_F))^n$$

car $\lambda \operatorname{Id}_F$ commute avec $f - \lambda \operatorname{Id}_F$. Prenons la valeur en $v \in \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_F)^p$:

$$f^n(v) = \lambda^n v + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (f - \lambda \operatorname{Id}_F)^k(v)$$

car $(f - \lambda \operatorname{Id}_F)^k(v) = 0$ pour $k \geq p$. D'après II., $|\lambda| < 1$ car c'est une valeur propre autre que 1. De I.1., on déduit que toutes les suites numériques en jeu (pour chaque k et chaque coordonnée) dans la suite de vecteurs $(f^n(x))_{n \geq p}$ convergent vers 0.

2. Soit λ une valeur propre telle que $\ker(f - \lambda \operatorname{Id}_F)^p \subset H$ et $v \neq 0_F$ un vecteur propre associé.

$$\left. \begin{array}{l} v \in \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_F) \subset \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_F)^p \subset H \\ H \cap \ker(f - \operatorname{Id}_F) = \{0_F\} \end{array} \right\} \Rightarrow f(v) \neq v \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$$

car d'après II. $|\lambda| \leq 1$ et $\lambda \neq 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$.

3. Comme $\operatorname{Vect}(u) \oplus H = F$, tout vecteur v se décompose en

$$v = \gamma(v) u + h \text{ avec } h = \in H = \ker \Gamma.$$

De plus, d'après la propriété admise, h se décompose en une somme $h = v_1 + \cdots + v_r$ avec $v_k \in \ker(f - \lambda_k)^p$. La question 2 montre que les suites de coordonnées des $f^n(v_k)$ convergent vers 0. La seule composante qui contribue réellement à la limite est celle dans $\operatorname{Vect}(u)$ qui est constante. Toutes les suites de coordonnées des $f^n(v)$ convergent vers la même valeur $\gamma(v)$.

Exercice

1. a. La linéarité est évidente. Elle résulte de la linéarité de la multiplication par un polynôme fixé et de la dérivation. Comme $\deg(A) = n$, le plus grand degré possible pour $f(P) = AP' - A'P$ avec $\deg(P) = s$ est $s + n - 1$. Examinons le coefficient de X^{s+n-1} :

$$(s-n)(\text{Coeff. dom. de } A)(\text{Coeff. dom. de } P)$$
$$\Rightarrow \deg(f(P)) \begin{cases} = s+p-1 \text{ si} s \neq n \\ \leq s+p-1 \text{ si} s = n \end{cases}$$
$$\Rightarrow p = \max\{\deg(f(S), S \in \mathbb{R}_m[X]\} = n + m - 1 \text{ car } n < \frac{m}{2} < m.$$

b. Par un calcul immédiat : $f(QA) = A^2Q'$.

c. La formule de dérivation suggérée par l'énoncé est

$$\left(\frac{P}{A}\right)' = \frac{AP' - A'P}{A^2}.$$

On en déduit que $f(P) = 0$ si et seulement si la fraction rationnelle $\frac{P}{A}$ est de dérivée nulle. On peut associer une fonction définie dans I car le polynôme A est sans racine dans cet intervalle. Si P est dans le noyau de f, il existe donc un réel λ tel que $\widetilde{P} = \lambda\widetilde{A}$. Attention, la relation précédente est relative à des fonctions. On en déduit l'égalité polynomiale car $P - \lambda A$ admet une infinité de racines. Finalement :

$$\ker f = \text{Vect}(A) \Rightarrow \text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_m[X] - 1 = m \text{ (théorème du rang).}$$

2. a. Notons $V = \text{Vect}\left(X^i, i \in J \setminus \{n\}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dim V = m = \dim(\mathbb{R}_m[X] - 1 \\ \deg(A) = n \Rightarrow V \cap \text{Vect}(A) = \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow V \oplus \ker f = E.$$

On en déduit avec le théorème « noyau-image » du cours que la restriction de f à V est injective et donc que la famille $\left(Y^i\right)_{i \in J\setminus\{n\}}$ est libre. Comme son nombre de vecteurs est égal à $\text{rg}(f)$, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

b. On a déjà vu que $f(A) = 0$. On en déduit par linéarité :

$$Y_n = -a_0Y_0 - a_1Y_1 - \cdots - a_{n-1}Y_{n-1} \text{ (pas de terme en } a_iY_i) .$$

3. a. On sait déjà (question 1a) que $\deg(Y_i) = n + i - 1$. Montrons que

$$\min\{\deg(S, S \in \text{Im}(f), S \neq 0\} = n - 1.$$

Ce degré est atteint pour $S = f(1) = -A'$.
Si $\deg(P) \neq n$, alors $\deg(f(P)) = n + \deg(P) - 1 \geq n - 1$.
Si $\deg(P) = n$, notons λ son coefficient dominant. Il existe alors un polynôme R tel que $P = \lambda A + R$ avec $\deg(R) < n$. Comme A est dans le noyau : $f(P) = f(R)$ avec $\deg(f(R)) = \deg(R) + n - 1 \geq n - 1$.

b. Un polynôme divisible par A^2 est de la forme A^2Q. Il est dans l'image de f car on peut écrire

$$A^2Q = f(AQ_1)$$

où Q_1 est un polynôme « primitif » de Q (c'est à dire tel que $Q_1' = Q$).
Supposons $P = A^2Q + R$ avec R dans l'image. Alors, par linéarité,

$$A^2Q \in \text{Im} f \Rightarrow P \in \text{Im} f.$$

Réciproquement, supposons $P = f(P_1)$ dans l'image. Écrivons la division euclidienne $P = A^2Q + R$ de P par A^2. Comme $A^2Q = f(Q_1)$, $R = f(P_1 - Q_1)$ est aussi dans l'image.
Comme R est le reste d'une division par A^2, la valeur maximale de son degré est $\deg(A^2) - 1 = 2n - 1$.

4. a. Les primitives de

$$\frac{f(P)}{A^2} = \frac{AP' - A'P}{A^2} = \left(\frac{P}{A}\right)'$$

sont les fractions rationnelles

$$\frac{P}{A} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

b. Pour $i \in J \setminus \{n\}$, $Y_i = f(X^i)$ donc une primitive de $\frac{Y_i}{A^2}$ est $\frac{X^i}{A}$.
Pour $i = n$,

$$Y_n = -a_0Y_0 - a_1Y_1 - \cdots - a_{n-1}Y_{n-1}$$

donc une primitive de $\frac{Y_n}{A^2}$ est

$$\frac{-a_0 - a_1X^1 - \cdots - a_{n-1}X^{n-1}}{A} = \frac{X^n - A}{A} = \frac{X^n}{A} - 1.$$

Dans ce cas aussi $\frac{X^n}{A}$ est une primitive de $\frac{Y_n}{A^2}$.

5. Dans cette question $m > 6$ et $A = X^3 - X + 1$.
   a. On trouve, après un calcul direct :
   $$Y_0 = -3X^2 + 1, \qquad Y_1 = -2X^3 + 1, \qquad Y_2 = -X^4 - X^2 + 2X.$$
   b. On peut exprimer $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ comme combinaison des Y_i en utilisant systématiquement le terme de plus haut degré. On obtient
   $$S = -Y_2 - 2Y_1 + Y_0 \in \operatorname{Im}(f).$$
   c. On déduit de la question précédente que
   $$\frac{-X^2 - 2X + 1}{A} \text{ est une primitive de } \frac{X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1}{(X^3 - X + 1)^2}.$$
   d. D'après les questions précédentes, un polynôme P est dans l'image si et seulement si il est combinaison des Y_i c'est à dire s'il existe u, v, w tels que
   $$P = -wX^4 - 2vX^3 - (w + 3u)X^2 + 2wX + v + u$$
   Le polynôme P est donc dans l'image si et seulement si le système suivant (aux inconnues u, v, w) admet des solutions. On le transforme par opérations élémentaires
   $$\begin{cases} -w = a \\ -2v = b \\ -w - 3u = c \\ 2w = d \\ v + u = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = e \\ -2v = b \\ -w = a \\ -3u - w = c \\ 2w = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = e \\ -2v = b \\ -w = a \\ 3v - w = c + 3e \\ 2w = d \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = e \\ -2v = b \\ -w = a \\ -w = c + 3e + \dfrac{3}{2}b \\ 2w = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = e \\ -2v = b \\ -w = a \\ 0 = c + 3e + \dfrac{3}{2}b - a \\ 0 = d + 2a \end{cases}$$
   La condition cherchée est donc
   $$\begin{cases} 2a + d = 0 \\ 2a - 3b - 2c - 6e = 0 \end{cases}.$$