Problème

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé, $p \geq 2$. On note $F = \mathbb{C}^p$ et $(e_1, \cdots, e_p)$ la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel F :

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ e_p = (0, \cdots, 0, 1).$$

On note $u = (1, 1, \cdots, 1) = e_1 + \cdots + e_p$ et on définit $\mathcal{Q}^+ \subset \mathbb{R}^p \subset F$ par :

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p,\ x \in \mathcal{Q}^+ \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i > 0)\,.$$

On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(F)$ défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1p}) \in \mathcal{Q}^+ \\ f(e_2) = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2p}) \in \mathcal{Q}^+ \\ \qquad \vdots \\ f(e_p) = (a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pp}) \in \mathcal{Q}^+ \end{cases} \quad \text{et vérifiant } f(u) = u.$$

Un tel endomorphisme est dit *stochastique*. L'objet de ce problème est d'introduire au théorème de Perron-Frobenius qui porte sur les suites de puissances de ces endomorphismes.

Partie I. Boîte à outils.

1. Propriétés de f.
   a. Soit $z = (z_1, \cdots, z_p) \in F$. Préciser le p-uplet $f(z) \in \mathbb{C}^p$.
   b. Montrer que $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ a_{ij} > 0$ et que
   $$\forall j \in [\![1, p]\!],\ a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{pj} = 1.$$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$ et $k \in [\![0, p-1]\!]$ fixé. La suite complexe $\left(\binom{n}{k}\lambda^n\right)_{n \geq p}$ est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?
3. *Ici, aucun raisonnement par l'absurde ou par contraposition ne sera lu.*
   Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels strictement positifs tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$.
   a. Soit $\mu_1, \cdots, \mu_p$ réels. Montrer que
   $$(\forall i \in [\![1, p]\!],\ \mu_i \geq 0) \Rightarrow\ \max(\mu_1, \cdots, \mu_p) \min(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \leq \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_p\mu_p.$$
   En déduire
   $$\left.\begin{aligned} \forall i \in [\![1, p]\!],\ \mu_i \geq 0 \\ \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_p\mu_p = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_p = 0.$$
   Déduire de la question précédente que
   $$\left.\begin{aligned} \forall i \in [\![1, p]\!],\ \mu_i \leq 1 \\ \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_p\mu_p = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_p = 1.$$
   b. Soit $u_1, \cdots, u_p$ complexes. Montrer que
   $$\left.\begin{aligned} \forall i \in [\![1, p]\!],\ |u_i| \leq 1 \\ \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_1 = \cdots = u_p = 1.$$

Partie II. Valeurs propres complexes.

On définit la notion de *vecteur propre* et de *valeur propre* de f.
Un nombre complexe λ est une valeur propre si et seulement si il existe $w \in F$ tel que

$$w \neq 0_E \text{ et } f(w) = \lambda w.$$

On dit alors que w est un vecteur propre de valeur propre λ.
On définit des parties $\mathcal{N}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^p = F$ par :

$$\forall w = (z_1, \cdots, z_p) \in F,\ \begin{cases} w \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \max(|z_1|, \cdots, |z_p|) = 1. \\ w \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \max(|z_1|, \cdots, |z_p|) \leq 1. \end{cases}$$

1. Dans le cas $p = 2$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan usuel, dessiner $\mathcal{N} \cap \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} \cap \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que 1 est une valeur propre. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des valeurs propres.
3. On veut montrer que le module d'une valeur propre est inférieur ou égal à 1.
   a. Soit w un vecteur propre de valeur propre λ. Montrer que pour, tout μ non nul dans $\mathbb{C}$, le vecteur μw est encore propre. Quelle est sa valeur propre ?
   b. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par f, c'est à dire que : $\forall w \in F,\ w \in \mathcal{B} \Rightarrow f(w) \in \mathcal{B}$.
   c. Soit w un vecteur non nul. Comment choisir $\mu > 0$ pour que $\mu w \in \mathcal{N}$?
   d. Conclure.
4. Soit λ une valeur propre de module 1.
   a. Montrer qu'il existe un vecteur propre $w = (z_1, \cdots, z_p) \in \mathcal{N}$ de valeur propre λ.
   b. En faisant jouer un rôle spécifique à un indice particulier j tel que $|z_j| = 1$, montrer que tous les z_i sont égaux entre eux et que $\lambda = 1$.
   c. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_F) = \mathrm{Vect}(u)$.

Partie III. Hyperplan supplémentaire stable.

1. Soit $g \in \mathcal{L}(F)$.
   a. Montrer[1] que $\dim(\ker g) \leq \dim(\ker g^2) \leq 2\dim(\ker g)$.
   b. Montrer que $\operatorname{Im} g \oplus \ker g = F \Leftrightarrow \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g^2 \Leftrightarrow \ker g = \ker g^2$.
2. Montrer que si $\dim\left(\ker(f - \operatorname{Id}_F)^2\right) \geq 2$, il existe $v \in \mathcal{B}$ tel que $f(v) \neq v$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n(v) = v + n(f(v) - v).$$
En déduire $\ker(f - \operatorname{Id}_F)^2 = \ker(f - \operatorname{Id}_F)$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_F)$ est un hyperplan supplémentaire de $\operatorname{Vect}(u)$. On le note H. Montrer que H est stable par f.
4. a. Soit φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur F et de même noyau. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
   b. Montrer qu'il existe une forme linéaire γ telle que $H = \ker \gamma$ avec $\gamma(u) = 1$. Montrer que $\gamma \circ f = \gamma$.
   c. Soit $v \in F$. Quelle est la projection de v sur $\operatorname{Vect}(u)$ parallèlement à H ?

Partie IV. Convergence.

Pour $v \in F$, on considère la suite de vecteurs $(f^n(v))_{n\in\mathbb{N}}$. L'objet de cette partie est d'établir une propriété de cette suite en notant
$$f^n(v) = \left(v_n^1, v_n^2, \cdots, v_n^p\right).$$
Il faut bien garder à l'esprit que dans la notation v_n^k, l'exposant k ne représente pas une puissance mais un numéro de coordonnée.

1. Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre et $v \in \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_F)^p$.
Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite complexe $\left(v_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Soit λ une valeur propre telle que $\ker(f - \lambda \operatorname{Id}_F)^p \subset H$. Montrer que $|\lambda| < 1$.
3. On admet[2] qu'il existe un ensemble de valeurs propres $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ tel que
$$H = \ker(f - \lambda_1 \operatorname{Id}_F)^p + \cdots + \ker(f - \lambda_r \operatorname{Id}_F)^p$$
Montrer que, pour tout $v \in F$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $\left(v_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma(v)$.

[1] La partie droite de cet encadrement ne servira pas dans le reste du problème.
[2] c'est une conséquence simple d'un théorème du cours de deuxième année.

Exercice

Soit m et n deux entiers naturels tels que $m > 2$ et $0 < 2n < m$. On note $J = [\![0, m]\!]$. Soit $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. On definit une application f de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par
$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X],\ f(P) = AP' - PA'.$$
On utilisera aussi un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas de racine de A.

1. a. Vérifier que f est linéaire et déterminer $p = \max\{\deg(S), S \in \operatorname{Im} f, S \neq 0\}$.
   b. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $QA \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $f(QA)$.
   c. En utilisant une formule de dérivation sur I, déterminer $\ker f$. En déduire $\operatorname{rg} f$.
2. Pour tout élément i de J, on pose $Y_i = f(X^i)$.
   a. Montrer que la famille de polynômes $(Y_i)_{i\in J\setminus\{n\}}$ est une base de l'image de f.
   b. En calculant $f(A)$, déterminer les coordonnées de Y_n dans cette base.
3. a. Pour tout $i \in J$, préciser $\deg(Y_i)$. En déduire $\min\{\deg(S), S \in \operatorname{Im} f, S \neq 0\}$.
   b. Pour tout $S \in \mathbb{R}_p[X]$, on note R_S le reste de la division de S par A^2.
   Montrer que $R_S = 0 \Rightarrow S \in \operatorname{Im} f$. En déduire $S \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow R_S \in \operatorname{Im} f$. Déterminer la valeur maximale de $\deg R_S$.
4. a. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$ et $S = f(P)$. Déterminer l'ensemble des primitives sur I de $\frac{S}{A^2}$.
   b. En déduire une primitive de $\frac{Y_i}{A^2}$ pour tout élément $i \in J$.
5. Dans cette question, $m > 6$ et $A = X^3 - X + 1$.
   a. Calculer Y_0, Y_1, Y_2.
   b. Montrer que $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1 \in \operatorname{Im} f$.
   c. Sans chercher à décomposer en éléments simples, déterminer une primitive de
$$\frac{X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1}{(X^3 - X + 1)^2}.$$
   d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d, e pour que $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \operatorname{Im} f$.