Partie 1. Questions de cours

1. Questions de rangs.
   a. Par linéarité de α_i :
   $$\alpha_i(x) = \alpha_i(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1\alpha_i(e_1) + \cdots + x_n\alpha_i(e_n) = x_1\alpha_{i1} + \cdots + x_n\alpha_{in}.$$
   b. Dans la base (1) de $\mathbb{R}$, la coordonnée de $\alpha_i(e_j)$ est $\alpha_i(e_j)$ donc
   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}(1)} = \begin{pmatrix}\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in}\end{pmatrix} = L_i(A).$$
   c. Le rang des lignes de A est le rang de la famille de vecteurs $(L_1(A), \cdots, L_m(A))$ dans l'espace $\operatorname{Mat}_{1n}(\mathbb{R})$ des matrices lignes(avec n colonnes).
   Le rang des colonnes est le rang de la famille de vecteurs $(C_1(A), \cdots, C_n(A))$ dans l'espace $\operatorname{Mat}_{m1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes (avec m lignes).
   Par définition le rang d'une matrice est le rang des colonnes.
   Pour une matrice A fixée, le rang des lignes est égal au rang des colonnes. Cette propriété vient de ce que une matrice et sa transposée ont le même rang ce qui se démontre en utilisant que le rang de A est r si et seulement si A est équivalente à la matrice particulière $J_r(m, n)$.
2. Dimension de S.
   a. D'après le théorème de la base incomplète, comme $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ est libre, on peut compléter la famille en une base $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$.
   b. Notons p_j l'application « j-ème composante » proposée par l'énoncé.
   Alors $p_j \in (\mathbb{R}^n)^*$ est une combinaison linéaire des α_k donc
   $$\forall j \in [\![1, n]\!],\ x \in S \Rightarrow \alpha_1(x) = \cdots = \alpha_n(x) = 0 \Rightarrow p_j(x) = x_j = 0$$
   donc $x = (0, \cdots, 0)$.
   c. Les applications Φ et Ψ sont linéaires avec
   $$\ker\Phi = \ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_n, \qquad \ker\Psi = \ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_m = S.$$
   D'après b., Φ est injective donc bijective car c'est un endomorphisme. La surjectivité de Φ entraine celle de Ψ. On en déduit $\dim S = n - m$ d'après le théorème du rang.
3. Solutions
   a. Par définition $\mathcal{S}$ (calligraphique) est l'ensemble des solutions du système avec le second membre b alors que S (imprimerie) est l'ensemble des solutions du système homogène (second membre nul). Comme b est non nul ces ensembles de solutions sont disjoints. En particulier $x \in \mathcal{S}^+$ entraine x non nul donc , par linéarité,
   $$\gamma(x) = \underbrace{c_1}_{>0}\underbrace{x_1}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{c_n}_{>0}\underbrace{x_n}_{\geq 0} > 0$$
   car un des x_j est strictement positif.
   b. Soit $x_0 \in \mathcal{S}$. Alors $A\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(x_0) = b$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\begin{aligned} x \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow A\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = b \Leftrightarrow A\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = A\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(x_0) \\ &\Leftrightarrow A\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(x - x_0) = 0_{\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow x - x_0 \in S. \end{aligned}$$
   c. Soit $x = (x_1, \cdots, s_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathcal{S}^+$ et $\lambda \in [0, 1]$. Notons $z = (z_1, \cdots, z_n) = \lambda x + (1 - \lambda)y$. On doit montrer que $z \in \mathcal{S}^+$ c'est à dire $z \in \mathcal{S}$ et $\forall j \in [\![1, n]\!],\ z_j \geq 0$.
   Introduisons une solution particulière $x_0 \in \mathcal{S}^+$.
   $$\left.\begin{aligned} &\exists u_x \in S \text{ tq } x = x_0 + u_x && \times\lambda \\ &\exists u_y \in S \text{ tq } y = x_0 + u_y && \times 1 - \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = x_0 + \underbrace{\lambda u_x + (1 - \lambda)u_y}_{\in S} \in \mathcal{S}.$$
   $$\forall j \in [\![1, n]\!],\ z_j = \underbrace{\lambda}_{\geq 0}\underbrace{x_j}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \lambda)}_{\geq 0}\underbrace{y_j}_{\geq 0} \geq 0.$$
4. Changement de base et matrice extraite.
   Soit $J \subset [\![1, n]\!]$ telle que $\mathcal{B} = (v_j, j \in J)$ soit une base de $\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$ et $A_J = A_{[\![1,m]\!]J} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matrice extraite à partir de A en ne considérant que les colonnes dont les indices sont dans J..
   a. $\operatorname{Mat}_{\mathcal{X}}(v_k) = v_k$ car $\mathcal{X}$ est la base *canonique* de $\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$. On en déduit que chaque colonne de A_J est la matrice des coordonnées de l'un des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (v_j, j \in J)$:
   $$A_J = P_{\mathcal{X}\mathcal{B}} \text{ matrice de passage de } \mathcal{X} \text{ dans } \mathcal{B} \Rightarrow A_J \text{ inversible.}$$
   b. D'après la formule de changement de base pour la matrice d'un vecteur :
   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v_k) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{X}\mathcal{B}}(\operatorname{Id})\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{X}}(v_k) = P_{\mathcal{B}\mathcal{X}}\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{X}}(v_k) = {A_J}^{-1}v_k.$$

Partie 2. Étude locale

Rappelons que dans cette partie $x \in \mathcal{S}^+$ et $u \in U$. et les notations :

$$\forall z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} J^+(z) = \{j \in [\![1,n]\!] \text{ tq } z_j > 0\},\ n^+(z) = \operatorname{Card}(J^+(z)) \\ J^-(z) = \{j \in [\![1,n]\!] \text{ tq } z_j < 0\},\ n^-(z) = \operatorname{Card}(J^-(z)) \\ J(z) = \{j \in [\![1,n]\!] \text{ tq } z_j \neq 0\} = J^+(z) \cup J^-(z) \\ n(z) = \operatorname{Card}(J(z)) = n^+(z) + n^-(z). \end{cases}.$$

1. Avec ces notations :

$$J^+(u) \neq \emptyset \Rightarrow \forall j \in J^+(u), \begin{cases} u_j > 0 \\ x_j \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m^+(x,u) \geq 0,$$
$$J^-(u) \neq \emptyset \Rightarrow \forall j \in J^-(u), \begin{cases} |u_j| > 0 \\ x_j \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m^-(x,u) \geq 0.$$

On caractérise logiquement la stricte positivité

$$m^+(x,u) > 0 \Leftrightarrow \forall j \in J^+(u), (x_j > 0 \text{ et } u_j > 0)$$
$$\Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!]n, (u_j > 0 \Rightarrow x_j > 0) \Leftrightarrow J^+(u) \subset J^+(x) = J(x).$$

Le raisonnement est analogue avec $J^-(u)$ et $|u_j|$.

2. Comme x est solution de l'équation avec le second membre b et λu solution de l'équation homogène, $x + \lambda u \in \mathcal{S}$ est solution de l'équation avec le second membre b.
3. Cette question porte sur la caractérisation des λ réels tels que *toutes* les composantes de $x + \lambda u$ soient positives ou nulles.
   a. Comme $x \in \mathcal{S}^+$, seuls les j tels que $u_j \neq 0$ importent. Supposons d'abord $J^+(u)$ et $J^-(u)$ non vides.

$$x + \lambda u \in \mathcal{S}^+ \Leftrightarrow \forall j \in J(u),\ x_j + \lambda u_j \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall j \in J^+(u), x_j + \lambda u_j \geq 0 \\ \forall j \in J^-(u), x_j - \lambda |u_j| \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall j \in J^+(u), \quad -\lambda \leq \dfrac{x_j}{u_j} \\ \forall j \in J^-(u), \quad \lambda \leq \dfrac{x_j}{|u_j|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda \leq m^+(x,u) \\ \lambda \leq m^-(x,u) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in \left[-m^+(x,u), m^-(x,u)\right].$$

   Si $J^+(u)$ est vide, il n'y a plus de conditions attachées aux $j \in J^+(u)$ donc plus de minoration de λ et la condition devient $\lambda \in]-\infty, m^-(x,u)]$. De même si $J^-(u) = \emptyset$, la condition devient $\lambda \in [-m^+(x,u), +\infty[$.

   b. D'après la question précédente,

$$\min I(x,u) = 0 \quad \Leftrightarrow (\exists j \in [\![1,m]\!] \text{ tq } u_j > 0 \text{ et } x_j = 0),$$
$$\max I(x,u) = 0 \quad \Leftrightarrow (\exists j \in [\![1,m]\!] \text{ tq } u_j < 0 \text{ et } x_j = 0)$$

   Comme $(u_j > 0 \text{ ou } u_j < 0) \Leftrightarrow u_j \neq 0$, ceci montre bien que

$$(\min I(x,u) = 0 \text{ ou } \max I(x,u) = 0) \Leftrightarrow \exists j \in [\![1,m]\!] \text{ tq } (u_j \neq 0 \text{ et } x_j = 0).$$

Partie 3. Noyau et relations entre colonnes

1. a. Chaque solution $u = (u_1, \cdots, u_n)$ de l'équation homogène correspond à une *relation* entre les colonnes v_k. En effet

$$u \in S \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_1 C_1(A) + \cdots + u_n C_n(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = 0_{\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \sum_{j \in J(u)} u_j v_j = 0_{\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})}$$

   car seuls les $j \in J(u)$ (tels que $u_j \neq 0$) contribuent à la somme. Les u_j avec $j \in J(u)$ sont tous non nuls donc à fortiori non tous nuls donc $(v_j, j \in J(u))$ est liée.

   b. Soit J une partie de $[\![1,n]\!]$ telle que $(v_j, , j \in J)$ liée. Il existe une relation entre les v_j c'est à dire des réels u_j pour $j \in J$ non tous nuls tels que $\sum_{j \in J} u_j v_j = 0_{\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})}$. Pour tous les $k \in [\![1,n]\!] \setminus J$, on pose $u_k = 0$ et $u = (u_1, \cdots, u_n)$. On a bien

$$J(u) \subset J \text{ et } \sum_{j \in [\![1,n]\!]} u_j v_j = 0_{\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow u \in S.$$

2. Caractérisation de l'extrémalité
   a. Formons la négation logique du résultat de 2.3.b

$$(\min I(x,u) = 0 \text{ ou } \max I(x,u) = 0) \text{ FAUX}$$
$$\Leftrightarrow (\exists j \in [\![1,n]\!] \text{ tq } (u_j \neq 0 \text{ et } x_j = 0)) \text{ FAUX}$$
$$\Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!],\ (u_j = 0 \text{ ou } x_j \neq 0) \Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!],\ (x_j = 0 \Rightarrow u_j = 0)$$
$$\Leftrightarrow \overline{J(x)} \subset \overline{J(u)}.$$

b. Soit $x \in \mathcal{S}^+$. Par définition d'une solution acceptable extrémale et en utilisant le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned} &x \text{ non extrémale} \\ &\Leftrightarrow \exists u \in S \text{ non nul tel que } (\min I(x,u) = 0 \text{ ou } \max I(x,u) = 0) \text{ FAUX} \\ &\Leftrightarrow \left(\overline{J(x)} \subset \overline{J(u)}\right) \text{ FAUX} \Leftrightarrow J(u) \subset J(x). \end{aligned}$$

La décomposition de u dans la base canonique est $u = \sum_{j\in J(u)} u_j e_j$ car les autres composantes sont nulles. On en déduit

$$J(u) \subset J(x) \Leftrightarrow u \in \operatorname{Vect}(e_j, j \in J(x)).$$

Donc x non extrémale si et seulement si $S \cap \operatorname{Vect}(e_j, j \in J(x)) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Toute solution non nulle $u = (u_1, \cdots, u_n) \in S$ correspond à une relation linéaire entre les v_j pour $j \in J(u)$. On en déduit $(v_j, j \in J(u))$ liée. Toute famille la contenant est aussi liée ; en particulier $(v_j, j \in J(x))$ si $J(u) \subset J(x)$.
Réciproquement, si $(v_j, j \in J(x))$ est liée, il existe une relation linéaire entre ses vecteurs donc une famille de réels $(u_j, j \in J(x))$ non tous nuls tels que $\sum_{j\in J(x)} u_j v_j = 0_{\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})}$. Pour tous les autres $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $u_k = 0$ ce qui définit un vecteur u non nul dans S tel que $J(u) \subset J(x)$.

c. Conséquence immédiate de la question précédente car « non liée » signifie « libre ».

$$x \text{ extrémale } \Leftrightarrow (v_j, j \in J(x)) \text{ libre.}$$

3. Soit $x \in \mathcal{S}^+$. D'après la question précédente, $(v_j, j \in J(x))$ est libre. Comme on veut compléter cette famille par des vecteurs particuliers, on ne peut pas utiliser directement le théorème de la base incomplète. Adaptons sa démonstration.
Considérons les parties J telles que $J(x) \subset J \subset [\![1,n]\!]$ et $(v_j, j \in J)$ libre. Il en existe, par exemple $J(x)$ elle même. Elle ont toutes moins de m éléments qui est la dimension de l'espace. Considérons en une J dont le nombre d'éléments est le plus grand possible. Pour tous les $k \notin J$, la famille obtenue en adjoignant v_k sera liée. Comme $(v_j, j \in J(x))$ est libre, v_k sera une combinaison linéaire des v_j qui engendreront donc tout l'espace. La famille $\mathcal{B} = (v_j, j \in J(x))$ est une base.

Partie 4. Algorithme du simplexe

1. a. On suppose que x est une solution non extrémale donc $(v_j, j \in J(x))$ est liée. Il existe un $j \in J(x)$ tel que v_j soit combinaison linéaire des v_k avec $k \in J(x)$ et $k \neq j$. Cela s'écrit comme une relation entre les v_k pour $k \in J(x)$ ce qui définit un $u \in S$ non nul avec $u_j = 1$.

b. Par définition de u de la question précédente, $J(u) \subset J(x)$ donc $J^+(u) \subset J(x)$ et $J^-(u) \subset J(x)$ ce qui entraine $m^+(x,u) > 0$ et $m^-(x,u) > 0$ d'après 2.1.
Considérons les extrémités de $I(x,u)$:

$$\begin{aligned} &x - m^+(x,u)u \in \mathcal{S}^+, \quad \gamma(x - m^+(x,u)u) = \gamma(x) - m^+(x,u)\gamma(u), \\ &x + m^-(x,u)u \in \mathcal{S}^+, \quad \gamma(x + m^-(x,u)u) = \gamma(x) + m^-(x,u)\gamma(u). \end{aligned}$$

Si $\gamma(u) = 0$, les deux valeurs de γ sont égales $\gamma(x)$. Sinon, une des deux est strictement inférieure. Il en existe donc toujours au moins une (notée y) telle que $\gamma(y) \leq \gamma(x)$.
Par construction, $J(y) \subset J(x)$. De plus, par définition des m^+ et m^- avec les inégalités, il existe $j \in J(x)$ tel que $y_j = 0$.
On a bien construit un $y \in \mathcal{S}^+$ avec $\gamma(y) \leq \gamma(x)$ et $J(y)$ strictement inclus dans $J(x)$.

2. D'un extrème à l'autre.
Ici $x \in \mathcal{S}^+$ est extrémal avec

$$J(x) \subset J \text{ et } \mathcal{B} = (v_j, j \in J) \text{ base de } \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R}).$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $k \notin J$.

a. Le principe est analogue à celui de la question précédente. Comme $\mathcal{B}$ est une base, on peut décomposer v_k dans cette base ce qui conduit à une relation entre les vecteurs La famille obtenue en adjoignant v_k à $\mathcal{B}$. Cette relation conduit à un $u \in S$ non nul avec $u_k = 1$ et $J(u) \subset J \cup \{k\}$.
L'expression des u_j comme une somme traduit l'expression (obtenue en 1.4.b) des coordonnées de v_k dans la $\mathcal{B}$.

b. On a déjà vu par construction que $J(u) \subset J \cup \{k\}$. De $u_k = 1$, on déduit $k \in J^+(u) \neq \emptyset$. De $x_k = 0$, on déduit $m^+(u) = 0$.
Comme $k \notin J^-(u)$, on a $J^-(u) \subset J(x)$ donc $m^-(x) > 0$. On le note θ.

c. On pose $y = x + \theta u$ qui est une solution acceptable d'après la partie 2. avec une composante nulle d'indice dans $J(x)$.
Il existe $j_0 \in J^-(u)$ tel que $y_{j_0} = 0$ avec $\theta = m^-(x,u) = -\frac{x_{j_0}}{u_{j_0}}$. Remarquons que $u_{j_0} < 0$ est forcément non nul dans ce procédé.
De plus, $J(y) \subset J'$ où J' est obtenue à partir de J en remplaçant j_0 par k.
On montre que y est extrémale en prouvant que $\mathcal{B}' = (v_j, j \in J')$ est une base c'est à dire qu'elle est libre car elle contient m vecteurs.
À partir d'une combinaison nulle des vecteurs de $\mathcal{B}'$, on forme une combinaison

nulle des vecteurs de $\mathcal{B}$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}}\lambda_j v_j+\lambda_k v_k=0\\ v_k=\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}}u_j v_j+u_{j_0}v_{j_0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}}\left(\lambda_j+\lambda_k u_j\right)v_j+\lambda_k u_{j_0}v_{j_0}=0$$

Comme $\mathcal{B}$ est libre, tous les coefficients sont nuls en particulier $\lambda_k u_{j_0}=0$ avec $u_{j_0}<0$ donc $\lambda_k=0$. En réinjectant dans la première combinaison, on tire

$$\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}}\lambda_j v_j=0$$

ce qui entraine que tous les λ_j sont nuls car $(v_j, j\in J\setminus\{j_0\})$ est libre.

3. Variation du coût. Avec les conditions et notations de la question précédente, par linéarité
$$\gamma(x)-\gamma(y)=\gamma(x)-\gamma(x+\theta u)=-\theta\gamma(u).$$
Ceci montre $\gamma(y)<\gamma(x)\Leftrightarrow\gamma(u)<0$ car $\theta>0$.

4. Optimalité. On garde les conditions et notations de la question 3.
Pour chaque $k\notin J$, comme le $u\in S$ dépend de k, on le note s_k.
   a. On sait que $\operatorname{Card}(J)=m$ car $\mathcal{B}$ est une base. Donc $\operatorname{Card}(\overline{J})=n-m$ qui est la dimension de S. Montrons que $\left(s_k, k\in\overline{J}\right)$ est libre.
   Considérons une combinaison nulle :
   $$\sum_{k\in\overline{J}}\lambda_k s_k=0_{\mathbb{R}^n}.$$
   Fixons un $l\notin J$ et considérons la composante d'indice l des $s_k\in\mathbb{R}^n$. Par définition de s_k, elle est nulle sauf si $k=l$. On en déduit $\lambda_l=0$ pour tous les l donc la famille est libre. Avec le même raisonnement, on obtient
   $$\forall u=(u_1,\cdots,u_n)\in S,\qquad u=\sum_{k\in\overline{J}}u_k s_k.$$
   b. On suppose ici que *tous* les s_k vérifient $\gamma(s_k)\geq 0$ pour $k\in\overline{J}$.
   Considérons un y quelconque dans $\mathcal{S}^+$. Attention, on sort des notations précédentes où y était extrémale et associée à un s_k particulier.
   Notons $y=(y_1,\cdots,y_n)$ et $u=y-x$.
   Alors $u\in S$ car y et x sont des solutions de l'équation avec second membre b.
   De plus $u_k=y_k\geq 0$ car $x_k=0$ à cause de $J(x)\subset J$. Décomposons u dans la base de la question précédente
   $$u=\sum_{k\in\overline{J}}y_k s_k\Rightarrow\gamma(u)=\sum_{k\in\overline{J}}\underbrace{y_k}_{\geq 0}\underbrace{\gamma(s_k)}_{\geq 0}\geq 0 \text{ car } y\in\mathcal{S}^+.$$
   On en déduit que $\gamma(x)=\gamma(y)-\gamma(u)\leq\gamma(y)$ pour toutes les solutions acceptables y. Donc x est une solution optimale c'est à dire dont la valeur de γ est la plus petite possible parmi les solutions acceptables.

5. Le problème posé admet une solution acceptable x_0. Le principe de l'algorithme du simplexe pour trouver une solution optimale est le suivant.
   - Initialisation : $x\leftarrow x_0$
   - Tant que $(v_j, j\in J(x))$ liée :
     $x\leftarrow y$ avec y défini par le procédé de 4.1.
   - Commentaire. x désigne une solution acceptable extrémale avec J comme en 4.2.
   - Tant qu'il existe $k\in\overline{J}$ tel que $\gamma(s_k)>0$.
     $x\leftarrow y$ avec y défini par le procédé de 4.2 pour k tel que $\gamma(u)=\gamma(s_k)>0$.
   - Commentaire. x désigne une solution optimale.

   Pour la première boucle.Un invariant est $\gamma(x)\leq\gamma(x_0)$ et $n(x)$ est une fonction de terminaison.
   Quand on est sorti de la boucle la famille est libre donc x est extrémale.
   Pour la deuxième boucle, $\gamma(x)$ décroît strictement à chaque passage mais comme sa valeur n'est pas forcément entière, cela ne constitue pas une fonction de terminaison.
   On raisonne avec les parties $J(x)$ de $[\![1,n]\!]$. Comme $\gamma(x)$ décroit strictement, on ne passe jamais deux fois par la même partie. On va sortir de cette boucle car l'ensemble de ces parties est fini.
   Pour le x obtenu à la sortie, tous les s_k vérifient $\gamma(s_k)\leq 0$ donc x est optimal.