Ce texte[1] introduit l'algorithme du simplexe. Il s'agit de minimiser une fonction coût dans un ensemble convexe de solutions d'un système d'équations et d'inéquations.

La partie 0 ne contient pas de questions mais rassemble toutes les notations. Il est conseillé de la lire une première fois sans chercher à tout mémoriser puis d'y revenir pour trouver ce que représente une notation rencontrée plus loin.

Partie 0. Notations

Soit m et n entiers avec $0 < m < n$.

1. Formes linéaires de $\mathbb{R}^n$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$. On rappelle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ e_j = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{indice } j}, 0, \cdots, 0).$$

Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ une famille de formes linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall j \in [\![1, n]\!] :\ a_{ij} = \alpha_i(e_j).$$

Les a_{ij} définissent une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. On introduit aussi l'intersection des noyaux

$$S = \ker \alpha_1 \cap \cdots \cap \ker \alpha_m .$$

On introduit une autre forme linéaire notée γ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Elle est appelée *forme (ou fonction) coût*.
On note $c_j = \gamma(e_j)$ pour tous $j \in [\![1, n]\!]$ et **on suppose** $\forall j \in [\![1, n]\!],\ c_j > 0$.

2. Matrices colonnes

Dans $\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$ (le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à m lignes), on note

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ v_j = C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

On suppose que $(v_1, \cdots, v_n)$ **engendre** $\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$ **et que** $b \neq 0_{\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})}$ **.**
On note $\mathcal{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes.

[1] d'après *Combinatorial Optimization.* ; C. H. Papadimitriou , K Steigliz ; Dover

3. Équations

On s'intéresse au système d'équations d'inconnue $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \alpha_1(x) = b_1 \\ \alpha_2(x) = b_2 \\ \quad\vdots \\ \alpha_m(x) = b_m \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = b.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de ce système. Par définition $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$.
On remarque que $S = \ker \alpha_1 \cap \cdots \cap \ker \alpha_m$ est l'ensemble des solutions du système homogène

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \alpha_i(x) = 0.$$

On note $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S} \cap (\mathbb{R}^+)^n$ l'ensemble des solutions *positives* :

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathcal{S}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1, m]\!], \alpha_i(x) = b_i \\ \forall j \in [\![1, n]\!], x_j \geq 0 \end{cases}.$$

Les éléments de $\mathcal{S}^+$ sont appelés des solutions *acceptables.*
On suppose que $\mathcal{S}^+$ est non vide.

4. Ensembles d'indices

Pour tout $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, on introduit des notations liées aux signes des valeurs :

$$\begin{aligned} &J^+(z) = \{j \in [\![1, n]\!] \text{ tq } z_j > 0\},\ n^+(z) = \operatorname{Card}(J^+(z)) \\ &J^-(z) = \{j \in [\![1, n]\!] \text{ tq } z_j < 0\},\ n^-(z) = \operatorname{Card}(J^-(z)) \\ &J(z) = \{j \in [\![1, n]\!] \text{ tq } z_j \neq 0\} = J^+(z) \cup J^-(z) \\ &n(z) = \operatorname{Card}(J(z)) = n^+(z) + n^-(z). \end{aligned}$$

Ces ensembles d'indices (parties de $[\![1, n]\!]$) seront utilisées pour des solutions $x \in \mathcal{S}$ et pour des vecteurs $u \in S$ dans l'intersection des noyaux.
Pour toute partie J de $[\![1, n]\!]$, on note $\overline{J} = [\![1, n]\!] \setminus J$. Par exemple

$$\overline{J(x)} = \{j \in [\![1, n]\!] \text{ tq } x_j = 0\}.$$

Rémy Nicolai S1908E

Partie 1. Questions de cours

1. Questions de rangs.
   a. Soit $i \in [\![1, m]\!]$ et $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Exprimer $\alpha_i(x)$. Préciser $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}(1)}(\alpha_i)$ où (1) désigne la base de $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   b. Rappeler la définition du rang des lignes de A, la définition du rang des colonnes de A, la proposition liant ces deux notions et le principe de sa démonstration.
   c. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = m$ et que $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
2. Dimension de S.
   a. Justifier que l'on peut compléter $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ en une base $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$.
   b. Montrer que $\ker(\alpha_1) \cap \cdots \cap \ker(\alpha_n) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. On pourra considérer les applications
   $$\forall j \in [\![1, n]\!], \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_j \end{cases}.$$
   c. On définit des applications Φ et Ψ :
   $$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)) \end{cases}, \quad \Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ x \mapsto (\alpha_1(x), \cdots, \alpha_m(x)) \end{cases}.$$
   Montrer qu'elles sont surjectives. En déduire $\dim S = n - m$.
3. Solutions.
   a. Montrer que $\mathcal{S} \cap S = \emptyset$ et que $\gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{S}^+$.
   b. Soit $x_0 \in \mathcal{S}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x - x_0 \in S$.
   On dit que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de direction S.
   c. Montrer que $\forall (x, y) \in {\mathcal{S}^+}^2, \forall \lambda \in [0, 1] :\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{S}^+$.
   On dit que $\mathcal{S}^+$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
4. Changement de base et matrice extraite.

   Soit $J \subset [\![1, n]\!]$ telle que $\mathcal{B} = (v_j, j \in J)$ soit une base de $\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$.
   On note $A_J = A_{[\![1,m]\!]J} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matrice extraite à partir de A en ne considérant que les colonnes dont les indices sont dans J.
   a. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, que vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{X}}(v_k)$? Montrer que A_J est inversible.
   b. Montrer que
   $$\forall k \in [\![1, n]\!] \setminus J, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_k) = {A_J}^{-1} v_k.$$

Partie 2. Étude locale

Soit $x \in \mathcal{S}^+$, $u \in S$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$. On étudie les conditions assurant que $x + \lambda u \in \mathcal{S}^+$. La figure **??** représente une partie convexe dans un plan qui permet de récupérer un peu d'intuition géométrique mais qui ne correspond pas à un véritable $\mathcal{S}^+$.

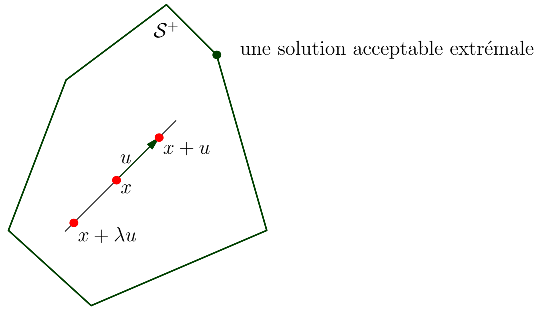

FIG. 1: Étude locale

On note $I(x, u) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } x + \lambda u \in \mathcal{S}^+\}$ et
$$m^+(x, u) = \min \left\{ \frac{x_j}{u_j}, j \in J^+(u) \right\} \quad \text{si } J^+(u) \neq \emptyset,$$
$$m^-(x, u) = \min \left\{ \frac{x_j}{|u_j|}, j \in J^-(u) \right\} \quad \text{si } J^-(u) \neq \emptyset.$$
Il est utile de remarquer que
$$J^-(x) = \emptyset,\ J(x) = J^+(x) \neq \emptyset \text{ car } x \in \mathcal{S}^+ (\text{donc non nul}),$$
$$J(u) = J^-(u) \cup J^+(u) \neq \emptyset \text{ car } u \text{ non nul}.$$

1. Montrer que
$$m^+(x, u) \geq 0, \quad m^+(x, u) > 0 \Leftrightarrow J^+(u) \subset J(x),$$
$$m^-(x, u) \geq 0, \quad m^-(x, u) > 0 \Leftrightarrow J^-(u) \subset J(x).$$
2. Montrer que $x + \lambda u \in \mathcal{S}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. a. Montrer que
$$I(x, u) = \begin{cases} [-m^+(x, u), m^-(x, u)] & \text{si } J^+(u) \neq \emptyset \text{ et } J^-(u) \neq \emptyset \\ [-m^+(x, u), +\infty[& \text{si } J^-(u) = \emptyset \\ ]-\infty, m^-(x, u)] & \text{si } J^+(u) = \emptyset \end{cases}.$$

b. Montrer que

$$(\min I(x,u) = 0 \text{ ou } \max I(x,u) = 0) \Leftrightarrow \exists j \in [\![1,n]\!] \text{ tq } (u_j \neq 0 \text{ et } x_j = 0).$$

On dit que $x \in \mathcal{S}^+$ est une solution *extrémale* si et seulement si

$$\forall u \in S \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \ (\min I(x,u) = 0 \text{ ou } \max I(x,u) = 0).$$

Géométriquement, on peut se convaincre qu'une solution acceptable extrémale correspond à un « coin » sur la figure **??**. La partie suivante propose une caractérisation algébrique.

Partie 3. Noyau et relations entre colonnes

1. a. Soit u non nul dans S. Montrer que la famille $(v_j, j \in J(u))$ est liée.
   b. Soit J une partie de $[\![1,n]\!]$ telle que $(v_j, j \in J)$ liée. Montrer qu'il existe u non nul dans S avec $J(u) \subset J$.
2. Caractérisation de l'extrémalité. Soit $x \in \mathcal{S}^+$ une solution acceptable.
   a. Soit u non nul dans S. Montrer que
   $$(\min I(x,u) = 0 \text{ ou } \max I(x,u) = 0) \text{ FAUX } \Leftrightarrow \overline{J(x)} \subset \overline{J(u)}.$$
   b. Montrer que
   $$x \text{ non extrémale } \Leftrightarrow S \cap \operatorname{Vect}(e_j, \, j \in J(x)) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Leftrightarrow (v_j, j \in J(x)) \text{ liée}.$$
   c. En déduire
   $$x \text{ extrémale } \Leftrightarrow (v_j, j \in J(x)) \text{ libre}.$$
3. Soit $x \in \mathcal{S}^+$ extrémale. Montrer qu'il existe $J \subset [\![1,n]\!]$ telle que $J(x) \subset J$ avec $\mathcal{B} = (v_j, j \in J)$ base de $\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$. [2]

Partie 4. Algorithme du simplexe

1. Soit $x \in \mathcal{S}^+$ non extrémale. On veut montrer
   $$\exists y \in \mathcal{S}^+ \text{ telle que } J(y) \subsetneq J(x) \text{ et } \gamma(y) \leq \gamma(x).$$
   a. Montrer que
   $$\exists j \in J(x), \exists u = (u_1, \cdots, u_n) \in S \text{ non nul tels que } J(u) \subset J(x) \text{ et } u_j = 1.$$

[2]Attention, si $n(x) < m$, il peut exister plusieurs parties J vérifiant ces conditions.

   b. Montrer que $m^+(x,u) > 0$ et $m^-(x,u) > 0$. Conclure en considérant $I(x,u)$.
2. D'un extrême à l'autre.
   Soit $x \in \mathcal{S}^+$ extrémale avec $J \subset [\![1,n]\!]$ telle que
   $$J(x) \subset J \text{ et } \mathcal{B} = (v_j, j \in J) \text{ base de } \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R}).$$
   Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $k \notin J$. On définit $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ par :
   $$\begin{cases} u_l = 0 & \text{si } l \notin J \cup \{k\} \\ u_k = 1 & \\ u_j = - \text{ coordonnée de } v_k \text{ relative à } v_j \text{ dans } \mathcal{B} & \text{si } j \in J \end{cases}.$$
   a. Montrer que u est un élément non nul de S.
   b. Montrer que
   $$J(u) \subset J(x) \cup \{k\}, \quad J^+(u) \neq \emptyset \text{ et } m^+(x,u) = 0, \quad m^-(x,u) > 0 \text{ on le note } \theta.$$
   c. On pose $y = x + \theta u$. Montrer que y est une solution acceptable extrémale.
3. Variation du coût. On garde les conditions et notations de la question précédente. Montrer que $\gamma(y) < \gamma(x) \Leftrightarrow \gamma(u) < 0$.
4. Optimalité. On garde les conditions et notations de la question 3.
   Pour chaque $k \notin J$, comme le $u \in S$ dépend de k, on le note s_k.
   a. Montrer que $\left(s_k, k \in \overline{J}\right)$ est une base de S. Quelles sont les coordonnées de $u = (u_1, \cdots, u_n) \in S$ dans cette base ?
   b. On suppose que $\gamma(s_k) \geq 0$ pour tous les $k \in \overline{J}$. Montrer que
   $$\forall y \in \mathcal{S}^+, \ \gamma(x) \leq \gamma(y).$$
5. Présenter le principe de l'algorithme du simplexe permettant de calculer un $x \in \mathcal{S}^+$ tel que
   $$\gamma(x) = \min\left\{\gamma(y), \ y \in \mathcal{S}^+\right\}.$$
   On s'attachera à justifier la terminaison de l'algorithme.