I. Généralisation de sommes usuelles

1. La fonction f est définie dans $]-\infty, 1[$ par $f(x) = (1-x)^r$ pour $r > 0$ fixé.
   a. Dérivées de f
   $$f'(x) = r(1-x)^{-(r+1)},\ f''(x) = r(r+1)(1-x)^{-(r+2)},\ \cdots,$$
   $$f^{(k)}(x) = \underbrace{r(r+1)\cdots}_{k \text{ facteurs}}(1-x)^{r+k}.$$
   Le dernier des k facteurs est $(r+k-1)$.
   b. Pour obtenir un coefficient du binôme, on écrit les facteurs dans l'autre sens
   $$\frac{f^{[k)}(0)}{k!} = \frac{\overbrace{(r+k-1)(r+k-2)\cdots}^{k \text{ facteurs}}}{k!} = \binom{r+k-1}{k}.$$
2. a. Pour tout $u \in [0, x]$,
   $$\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t} = u \Leftrightarrow (1-u)t = x-u \Leftrightarrow t = \frac{x-u}{1-u}$$
   On en déduit que φ_x est injective. D'après un théorème de cours, elle est monotone car elle est continue. Elle est décroissante car $\varphi_x(0) = x$ et $\varphi_x(x) = 0$. Elle est donc bijective de $[0, x]$ dans lui même. Elle involutive c'est à dire égale à sa bijection réciproque.
   Par une décomposition idiote :
   $$\varphi_x(t) = \frac{(x-1)+(1-t)}{1-t} = \frac{x-1}{1-t} + 1 \Rightarrow \frac{1}{1-t} = \frac{1}{x-1}(\varphi_x(t) - 1).$$
   b. On effectue le changement de variable
   $$\varphi = \frac{x-t}{1-t} \quad \text{dans} \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}}\,dt.$$
   Les bornes sont inversées. Un φ^n apparait clairement sous l'intégrale. Pour l'élément différentiel, on dérive la relation de la question b.
   $$\frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{d\varphi}{x-1} \Rightarrow dt = \frac{(1-t)^2}{x-1}\,d\varphi = \left(\frac{x-1}{\varphi-1}\right)^2 \frac{1}{x-1}\,d\varphi = \frac{x-1}{(\varphi-1)^2}\,d\varphi$$
   en utilisant $1 - t = \frac{x-1}{\varphi-1}$ qui vient aussi de b. On en déduit
   $$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}}\,dt = \int_x^0 \varphi^n \frac{(\varphi-1)^{r+1}}{(x-1)^{r+1}} \frac{x-1}{(\varphi-1)^2}\,d\varphi = \frac{1}{(1-x)^r}\int_0^x \varphi^n(1-\varphi)^{r-1}\,d\varphi.$$
3. Majorations.
   a. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante dans $]0, +\infty[$:
   $$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{dt}{t},\ \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{dt}{t},\ \cdots \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t},\ \cdots$$
   $$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n).$$
   b. En étudiant $x \mapsto \ln(1+x) - x$ dans $]-1, +\infty[$, on montre que $\ln(1+x) \leq x$ pour tous les $x > 0$.
   c. On exprime le coefficient du binôme comme un produit de n fractions, on passe en exponentielle et on utilise les majorations précédentes
   $$\binom{r+n}{n} = \frac{r+1}{1}\frac{r+2}{2}\cdots\frac{r+n}{n} = e^{\ln(1+r)+\ln(1+\frac{r}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{r}{n})}$$
   $$\leq e^{r+r\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} \leq e^{r+r\ln(n)} = (ne)^r.$$
   d. De $0 \leq \varphi \leq x < 1$, on tire $0 < 1-\varphi \leq 1$. On en déduit
   $$0 \leq \int_0^x \varphi^n(1-\varphi)^{r-1}\,d\varphi \leq \int_0^x \varphi^n\,d\varphi = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
4. Appliquons à f la formule de Taylor avec reste intégral :
   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$
   $$\text{avec } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Rémy Nicolai S1909C

En remplaçant avec le résultat de 1.b., on trouve le bon début de développement

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k-1}{k} x^k + R_n(x)$$

$$\text{avec } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{r(r+1)\cdots(r+n)}{(1-t)^{r+n+1}}\,dt = r\binom{r+n}{n}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}}\,dt.$$

Avec le changement de variable de 2.b.

$$R_n(x) = \frac{r\binom{r+n}{n}}{(1-x)^r}\int_0^x \varphi^n(1-\varphi)^{r-1}\,d\varphi$$

que l'on encadre avec 3.d. puis 3.c

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{r\binom{r+n}{n}}{(1-x)^r}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq r\left(\frac{ne}{1-x}\right)^r \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La deuxième forme de la somme permet de la voir comme une généralisation de la formule du binôme. Elle repose seulement sur la convention généralisant les coefficients du binôme

$$\binom{r+k-1}{k} = \frac{(r-1+k)(r-1+k-1)\cdots(r-1+1)}{k} = \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-(k-1))}{k!}(-1)^k = \binom{-r}{k}(-1)^k.$$

5. Convergences.
   a. La fonction R_n est évidemment $\mathcal{C}^\infty$ car combinaison de f et d'un polynôme. On peut dériver facilement l'expression de $R_n(x)$ de la question précédente (intégrale en φ) car le x ne figure pas dans la fonction à intégrer :

$$R_n'(x) = \frac{r}{1-x}\,R_n(x) + \frac{r\binom{r+n}{n}}{(1-x)^r}\,x^n(1-x)^{r-1} = \frac{r}{1-x}\,R_n(x) + r\binom{r+n}{n}\frac{x^n}{1-x}.$$

   b. Le point important est que $\left(\frac{n^r x^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\binom{n+r}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0 à cause de la majoration de 3.c. et des comparaisons des suites usuelles car $0<x<1$. On en déduit $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$ d'après l'encadrement de 4. et $(R_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$ avec 5.a. On obtient $(R_n''(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$ en dérivant 5.a. ce qui conduit à une expression du même genre.
   c. Si $r=1$,

$$\binom{r+k-1}{k} = 1 \text{ et } R_n(x) = \frac{\binom{n+1}{n}}{1-x}\int_0^x \varphi^n\,d\varphi = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

   Le développement de la question 4. est simplement le développement géométrique usuel :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

II. Loi géométrique

1. On a vu à la fin du I. que pour f_1, le développement est la formule usuelle

$$\begin{aligned} pxf_1(qx) = \frac{px}{1-qx} &= px\left(1 + (qx) + (qx)^2 + \cdots + (qx)^{n-1} + R_{1,n-1}(qx)\right) \\ &= q^0px + qpx^2 + \cdots + q^{k-1}px^k + \cdots + q^{n-1}px^n + pxR_{1,n-1}(qx) \\ &= \mathbb{P}(X=1)x + \mathbb{P}(X=2)x^2 + \cdots + \mathbb{P}(X=k)x^k + \cdots + \mathbb{P}(X=n)x^n + pxR_{1,n-1}(qx). \end{aligned}$$

2. a. Dérivons la relation précédente :

$$\frac{p}{1-qx} + \frac{pqx}{(1-qx)^2} = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)x^{k-1} + pR_{1,n-1}(qx) + pqxR_{1,n-1}'(qx).$$

   Prenons la valeur en 1 pour faire apparaitre l'espérance :

$$\frac{p}{1-q} + \frac{pq}{(1-q)^2} = E(X) + pR_{1,n-1}(q) + pqR_{1,n-1}'(q)$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{p} + u_n \text{ avec } u_n = -pR_{1,n-1}(q) - pqR_{1,n-1}'(q)$$

$$\text{et } \frac{p}{1-q} + \frac{pq}{(1-q)^2} = 1 + \frac{q}{p} = \frac{1}{p} \text{ car } 1-q=p.$$

b. On dérive une autre fois et on prend la valeur en 1 :

$$\frac{2pq}{(1-q)^2}+\frac{2pq^2}{(1-q)^3}=E(X(X-1))+2pqR'_{1,n-1}(1)+pq^2R''_{1,n-1}(q)$$
$$\text{avec } \frac{2pq}{(1-q)^2}+\frac{2pq^2}{(1-q)^3}=\frac{2q}{p}+\frac{2q^2}{p^2}=\frac{2q}{p^2}(p+q)=\frac{2q}{p^2}$$
$$\Rightarrow E(X(X-1))=\frac{2q}{p^2}+v_n \text{ avec } v_n=-2pqR'_{1,n-1}(1)-pq^2R''_{1,n-1}(q).$$

c. Variance

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X(X-1))+E(X)-(E(X))^2$$
$$=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+w_n=\frac{q+(q+p)-1}{p^2}+w_n=\frac{q}{p^2}+w_n.$$

L'expression de w_n est

$$w_n=v_n+u_n-u_n^2-2u_n=v_n-u_n-u_n^2.$$

3. D'après les majorations du I, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0 donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi ce qui assure la convergence de la suite des espances et des variances.

III. Temps d'attente

1. Loi du temps d'attente du premier succès. Par définition, $S_{1,n}(\Omega)=[\![0,1+n]\!]$.
$S_{1,n}=0$ est l'événement « les $n+1$ expériences ont été des échecs » donc $\mathbb{P}(S_{1,n}=0)=q^{n+1}$.
Pour $k\in[\![1,n+1]\!]$,

$$(S_{1,n}=k)=\text{« les } k-1 \text{ premières expériences sont des échecs »}$$
$$\cap \text{ « la } k\text{-ième est une réussite »}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_{1,n}=k)=q^{k-1}p$$

car la k-ième exprérience est indépendante des précédentes.

2. Temps d'attente du r-ième succès.

a. Par définition de la variable aléatoire, $S_{r,n}(\Omega)=\{0\}\cup[\![r,r+n]\!]$.

b. Soit $k\in[\![r,n]\!]$. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de succès lors des $k-1$ premières épreuves. D'après le cours, X suit une loi binomiale de paramètres $k-1$ et p. De plus

$$(S_{r,n}=k)=(X=r-1)\cap \text{ « la } k\text{-ième épreuve est un succès »}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_{r,n}=k)=\mathbb{P}(X=r-1)\,\mathbb{P}(\text{ « la } k\text{-ième épreuve est un succès »})$$
$$=\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{k-r}\,p=\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}.$$

car les épreuves sont indépendantes.

3. Fonction génératrice de $S_{r,n}$.

a. Reprenons le développement de I.4. et changeons de nom d'indice $k'=k+r$ dans la somme

$$f_r(x)=\frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}x^k+R_{r,n}(x)$$
$$=\sum_{k'=r}^{n+r}\binom{k'-1}{k'-r}x^{k'-r}+R_{r,n}(x)=\sum_{k=r}^{n+r}\binom{k-1}{k-r}x^{k-r}+R_{r,n}(x)$$
$$=\sum_{k=r}^{n+r}\binom{k-1}{r-1}x^{k-r}+R_{r,n}(x)$$

par symétrie du coefficient du binôme.

b. La formule précédente est valable pour tous les $x\in[0,1[$. Comme $0<q<p$, on peut remplacer x par qx avec $x\in[0,1]$:

$$\frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{k=r}^{n+r}\binom{k-1}{r-1}(qx)^{k-r}+R_{r,n}(qx).$$

Multiplions par p^rx^r pour faire apparaitre le $\mathbb{P}(S_{r,n}=k)=\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}$ et disparaitre le x^k au dénominateur

$$\frac{p^rx^r}{(1-x)^r}=\sum_{k=r}^{n+r}\underbrace{\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}}_{=\mathbb{P}(S_{r,n}=k)}x^k+p^rx^rR_{r,n}(qx).$$

En prenant la valeur en 1, comme $1-q=p$, on obtient :

$$1=\sum_{k=r}^{n+r}\mathbb{P}\left(S_{r,n}=k\right)+p^rR_{r,n}(q,x)$$

$$\text{avec }\sum_{k=r}^{n+r}\mathbb{P}\left(S_{r,n}=k\right)=\mathbb{P}\left(S_{r,n}>0\right)=1-\mathbb{P}\left(S_{r,n}=0\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(S_{r,n}=0\right)=p^rR_{r,n}(q,x).$$

4. En dérivant l'égalité du a. et en prenant la valeur en 1, on obtient

$$\frac{rp^r}{(1-q)^r}+\frac{rp^rq}{(1-q)^{r+1}}=E(S_{r,n})+u_n$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 d'après I.5.b. On en déduit (avec $p+q=1$),

$$(E(S_{r,n}))_{n\in\mathbb{N}^*}\to\frac{rp^r}{(1-q)^r}+\frac{rp^rq}{(1-q)^{r+1}}=r+\frac{rq}{p}=r\,\frac{p+q}{p}=\frac{r}{p}.$$

5. Dans cette question, on effectue $n+r$ tirages. Une issue élémentaire est une suite de $n+r$ succès (S) ou échec (E). Pour une telle issue ω, notons s le nombre de succès.
   a. Par définition, $Y_i(\{\omega\})=0$ si $S_{r,n}(\{\omega\})=0$ c'est à dire si $s<r$. Pour les autres issues élémentaires, la somme est télescopique et on obtient

   $$Y_1+\cdots+Y_r=S_{r,n}.$$

   b. Soit $k\in[\![r,n+r]\!]$. Par définition, $(Y_i=k)\subset(S_{r,n}>0)\subset(S_{i-1,n+r-i+1}>0)$. On peut donc décomposer selon les valeurs possibles de $S_{i-1,n+r-i+1}$ c'est à dire $[\![i-1,n+r]\!]$.

   $$(Y_i=k)=\bigcup_{j\in[\![i-1,n+r]\!]}(Y_i=k)\cap(S_{i-1,n+r-i+1}=j)$$

   $$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_i=k)=\sum_{j\in[\![i-1,n+r]\!]}\mathbb{P}\left((Y_i=k)\cap(S_{i-1,n+r-i+1}=j)\right)$$

   L'événement $(S_{i-1,n+r-i+1}=j)\cap(Y_i=k)$ est constitué des tirages de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots & S & E & \cdots & E & S & \cdots\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\ i-2\text{ S parmi } j-1 \text{ exp} & j & j+1 & \cdots & j+k-1 & j+k & \text{issues quelconques}\end{array}$$

Comme les expériences sont indépendantes,

$$\mathbb{P}\left((S_{i-1,n+r-i+1}=j)\cap(Y_i=k)\right)=\mathbb{P}\left((S_{i-1,n+r-i+1}=j)\right)q^{k-1}p$$

On peut mettre en facteur le $q^{k-1}p$ qui est le même pour tous :

$$\mathbb{P}(Y_i=k)=\left(\sum_{j\in[\![i-1,n+r]\!]}\mathbb{P}\left(S_{i-1,n+r-i+1}=j\right)\right)q^{k-1}p$$

$$=\mathbb{P}\left(S_{i-1,n+r-i+1}>0\right)q^{k-1}p.$$

D'après 3.b. et les majorations du I,

$$\mathbb{P}\left(S_{i-1,n+r-i+1}>0\right)=1-\varepsilon_{i,n}\text{ avec }\left(\varepsilon_{i,n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\to 0$$

$$\Rightarrow(E(Y_i))_{n\in\mathbb{N}^*}=((1-\varepsilon_{i,n})E(S_{1,n+r-1}))_{n\in\mathbb{N}^*}\to\frac{1}{q}.$$

Par linéarité de l'espérance et de la limite

$$(E(S_{r,n}))_{n\in\mathbb{N}^*}=(E(Y_1))_{n\in\mathbb{N}^*}+\cdots+(E(Y_r))_{n\in\mathbb{N}^*}=\frac{r}{p}.$$

IV. Transitions

1. Les coefficients de T sont positifs ou nuls car ce sont des probabilités contionnelles. Les événements $E_n^1,E_n^2,\cdots,E_n^m,A_n$ forment un système complet. D'après la formule des probabilités totales, en notant $\mathbb{P}_i$ la probabilité conditionnelle sachant que le système était dans l'état i avant une transition (disons la n-ième),

$$\mathbb{P}_i(\Omega)=1=\sum_{j=1}^{m+1}p_i(E_n^j)=\sum_{j=1}^{m+1}t_{ij}.$$

2. a. Les 0 sur la ligne $m+1$ en bas à gauche de T marquent simplement le caractère absorbant de l'état $m+1$. Une fois dans cet état, la probabilité de changer d'état est nulle. La propriété sur la somme des lignes se traduit par

$$\begin{pmatrix}Q & C\\ 0\cdots 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U\\1\end{pmatrix}\Rightarrow QU+C=U\Rightarrow C=(I_m-Q)U.$$

en effectuant le produit par blocs et en considérant seulement les m premières lignes.

b. La formule est valable pour $n=1$, continuons par récurrence en montrons que l'ordre $n-1$ entraine l'ordre n :

$$T^n = T^{n-1}T = \begin{pmatrix} Q^{n-1} & (I-Q^{n-1})U \\ 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & C \\ 0\cdots 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^n & Q^{n-1}C + (I-Q^{n-1})U \\ 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'expression de C

$$Q^{n-1}C + (I-Q^{n-1})U = Q^{n-1}(I_m - Q)U + (I_m - Q^{n-1})U = \left(Q^{n-1} - Q^n + I_m - Q^{n-1}\right)U = (I_m - Q^n)\,U.$$

3. Transitions et produit matriciel.

a. La formule $L_n = L_0T^n$ se démontre par récurrence avec la formule des probabilités totales. Elle est vraie pour $n=0$, montrons que l'ordre $n-1$ entraine l'ordre n. Considérons le terme d'indice j de L_n :

$$\begin{aligned}\text{terme } 1,j \text{ de } L_n = \mathbb{P}(E_n^j) &= \sum_{i=1}^{m+1}\mathbb{P}(E_{n-1}^i)\mathbb{P}_{E_{n-1}^i}(E_n^j)\\ &= \sum_{i=1}^{m+1}\left(\text{ terme } 1,i \text{ de } L_{n-1}\right)t_{ij} = \text{ terme } 1,j \text{ de } L_{n-1}T\\ &= \text{ terme } 1,j \text{ de } L_0T^{n-1}T = \text{ terme } 1,j \text{ de } L_0T^n\end{aligned}$$

b. Par définition de L_n :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \text{ terme } 1,m+1 \text{ de } L_n = \text{ terme } 1,m+1 \text{ de } L_0T^n\\ &= \text{ terme } 1,m+1 \text{ de } \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^n & (I-Q^n)U \\ 0\cdots 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m)\end{pmatrix}(I-Q^n)U.\end{aligned}$$

4. Ici X est le temps d'attente de l'état absorbant.

a. Par définition $(X > n) = \overline{A_n}$ c'est à dire le complémentaire de l'événement « être dans l'état absorbant après n transitions ». D'après la relation de 3.b.,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m)\end{pmatrix}U - \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m)\end{pmatrix}Q^nU\\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_0^i)\right)}_{=1} - \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m)\end{pmatrix}Q^nU\end{aligned}$$

On en déduit
$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m)\end{pmatrix}Q^nU.$$

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $X = k$ se produit lorsque le système n'est pas dans l'état absorbant après $k-1$ transitions mais qu'il l'est après la k-ième :

$$\begin{aligned}(X=k) = \overline{A_{k-1}} \cap A_k &= \bigcup_{i=1}^m E_{k-1}^i \cap A_k\\ \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_{k-1}^i)\mathbb{P}_{E_{k-1}^i}(A_k) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_{k-1}^i)t_{im+1}\\ &= \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_{k-1}^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_{k-1}^m)\end{pmatrix}C\end{aligned}$$

La relation $L_n = L_0T^n$ entraine

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_{k-1}^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_{k-1}^m)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m)\end{pmatrix}Q^{k-1}$$

On en déduit
$$\mathbb{P}(X=k) = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m)\end{pmatrix}Q^{k-1}C.$$

On pouvait aussi raisonner en utilisant la décomposition en événements disjoints

$$(X > k-1) = (X=k)\cup(X>k) \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k)$$

puis le résultat de 3.b.

5. a. La matrice se décompose $Q = qI_m + pN$ où N est nulle sauf pour la bande de 1 juste au dessus de la diagonale. Pour les puissances de N, la bande de 1 se décale vers le haut à droite avec $N^m = 0$. On en déduit

$$Q^k = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{k}{i}p^{k-i}q^iN^i.$$

b. Le système comprend un dispositif permettant de « compter » les succès jusqu'à r. Le compteur ne peut que s'incrémenter et se bloque à r. Pour un tel système $m = r$ et l'état 1 correspond à 0 succès, l'état 2 à 1 succès, $\cdots$, l'état m à r succès, l'état absorbant à r succès. la matrice de transition est

$$T = \begin{pmatrix} Q & C \\ 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}).$$

Le temps d'attente du r-ième succès est le temps d'attente du passage à l'état absorbant pour le système en commençant obligatoirement dans l'état 1 (0 succès) avant les transitions. D'après 4.b.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} C_r(Q^{k-1}) \\ &= p \times \text{ terme } 1, r \text{ de } Q^{k-1} = p \times \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-1-r+1} = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.\end{aligned}$$

car dans l'expression de Q^{k-1} comme somme, le seul i qui contribue à la dernière colonne est $r - 1$.