Dans tout le problème, p et q appartiennent à $]0,1[$ et vérifient $p+q=1$.
Pour tout $z\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on convient de noter

$$\binom{z}{n}=\frac{\overbrace{z(z-1)\cdots}^{n\text{ facteurs}}}{n!}.$$

I. Généralisation de sommes usuelles

Soit $r>0$ et $f\in\mathcal{C}^\infty(]-\infty,1[$ définie par :

$$\forall x<1,\ f(x)=(1-x)^{-r}.$$

1. Dérivées de f.
   a. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$. Exprimer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x<1$ et $k\in\mathbb{N}$.
   b. Pour $k\in\mathbb{N}$, exprimer $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ comme un coefficient du binôme selon la convention de l'énoncé.
2. Changement de variable dans une intégrale. Soit $x\in]0,1[$.
   a. On définit φ_x dans $[0,x]$ par :
   $$\varphi_x(t)=\frac{x-t}{1-t}.$$
   Montrer que φ_x définit une bijection de $[0,x]$ dans $[0,x]$ et que
   $$\forall x\in]0,1[\,,\ \forall t\in[0,x]\,,\quad \frac{1}{1-t}=\frac{1}{x-1}(\varphi_x(t)-1).$$
   b. Effectuer le changement de variable
   $$\varphi=\frac{x-t}{1-t}\quad\text{dans}\quad\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}}\,dt.$$
3. Majorations.
   a. Par comparaison à une intégrale, montrer que
   $$\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2,\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq\ln(n).$$
   b. Montrer que
   $$\forall x>-1,\quad \ln(1+x)\leq x.$$
   c. Montrer que
   $$\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2,\forall r\in\mathbb{N}^*,\quad \binom{r+n}{n}\leq(n\,e)^r.$$
   d. Soit $x\in]0,1[$. Montrer que
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leq\int_0^x\varphi^n(1-\varphi)^{r-1}\,d\varphi\leq\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
4. Montrer que $\forall x\in[0,1[$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,
   $$(1-x)^{-r}=\sum_{k=0}^n\binom{r+k-1}{k}x^k+R_n(x)=\sum_{k=0}^n\binom{-r}{k}(-x)^k+R_n(x)$$
   $$\text{avec } 0\leq R_n(x)\leq r\left(\frac{ne}{1-x}\right)^r\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
5. Convergences.
   a. Montrer que $R_n\in\mathcal{C}^{+\infty}([0,1[)$ et que
   $$\forall x\in[0,1[\,,\ R_n'(x)=\frac{r}{1-x}R_n(x)+r\binom{n+r}{n}\frac{x^n}{1-x}.$$
   b. Pour tout $x\in[0,1[$, montrer que
   $$(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}\to 0,\quad (R_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*}\to 0,\quad (R_n''(x))_{n\in\mathbb{N}^*}\to 0.$$
   c. Dans le cas particulier $r=1$, quelle est l'expression de $R_n(x)$ et que dire du résultat de la question 4. ?

Dans cette partie, on a considéré que r était fixé et on a choisi de ne pas indiquer dans les notations f et R_n que les fonctions ainsi nommées dépendaient du paramètre r. Dans la suite du problème, on considère plusieurs r et on note ces fonctions f_r et $R_{r,n}$.

II. Loi géométrique

Soit $n\geq 2$ entier naturel. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique tronquée de paramètres n et p si et seulement si

$$X(\Omega)=[\![0,n]\!];\qquad \forall k\in[\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k)=\begin{cases}q^n & \text{si } k=0\\ q^{k-1}p & \text{si } k\in[\![1,n]\!]\end{cases}.$$

Cette création est mise à disposition selon le Contrat
Paternité-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France
disponible en ligne http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/

1. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1[\,,\ p\,x f_1(qx) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)x^k + pxR_{1,n-1}(qx).$$

2. a. Exprimer u_n en fonction de p, q et de la fonction $R_{1,n-1}$ pour que

$$E(X) = \frac{1}{p} + u_n.$$

b. Exprimer v_n en fonction de p, q et de la fonction $R_{1,n-1}$ pour que

$$E(X(X-1)) = \frac{2q}{p^2} + v_n.$$

c. Exprimer w_n en fonction de u_n et v_n pour que

$$V(X) = \frac{q}{p^2} + w_n.$$

3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 2}$ de variables aléatoires. Chaque X_n suit une loi géométrique tronquée de paramètres n et p. Montrer que

$$(E(X_n))_{n\geq 2} \to \frac{1}{p}, \qquad (V(X_n))_{n\geq 2} \to \frac{q}{p^2}.$$

III. Temps d'attente

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p (probabilité d'un « succès »).
Soit r et n dans $\mathbb{N}^*$. On effectue $r+n$ épreuves de Bernoulli. On note $S_{r,n}$ la variable aléatoire égale au temps d'attente du r-ième succès en convenant d'affecter la valeur 0 si on a obtenu strictement moins de r succès.
Par exemple, pour le temps d'attente du premier succès avec $n=4$:

$$S_{1,4}(\{(E,E,S,S,E)\}) = 3, \qquad S_{1,4}(\{(E,E,E,E,E)\}) = 0.$$

Pour le troisième succès ($r=3$) avec $n=7$:

$$S_{3,7}(\{(S,E,S,E,S,S,E,S,S,E)\}) = 5, \qquad S_{3,7}(\{(S,E,E,E,S,E,E,E,E,E)\}) = 0.$$

Sauf pour la première question, on supposera $r \geq 2$.

1. Temps d'attente du premier succès. Montrer que $S_{1,n}$ suit une loi géométrique tronquée de paramètres $n+1$ et p.

2. Loi de $S_{r,n}$.

   a. Quel est l'ensemble $S_{r,n}(\Omega)$?

   b. Pour $k \in [\![r, r+n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(S_{r,n}=k)$ en considérant la variable aléatoire égale au nombre de succès lors des $k-1$ premières épreuves.

3. Fonction génératrice de $S_{r,n}$.

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1[$,

$$f_r(x) = \sum_{k=r}^{r+n} \binom{k-1}{r-1} x^{k-r} + R_{r,n}(x).$$

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{p^r x^r}{(1-qx)^r} = \sum_{k=r}^{r+n} \mathbb{P}\left(S_{n,r}=k\right) x^k + p^r x^r R_{r,n}(qx).$$

   En déduire $\mathbb{P}\left(S_{r,n}=0\right) = p^r R_{r,n}(q)$.

4. Espérance. Calculer la limite de $(E(S_{r,n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. On effectue $n+r$ épreuves et, pour $i \in [\![1,r]\!]$, on considère le temps d'attente $S_{i,n+r-i}$ du i-ième succés. Pour $i \in [\![2,r]\!]$, on définit la variable Y_i par :

$$Y_i(\{\omega\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_{r,n}(\{\omega\}) = 0 \\ S_{i,n+r-i}(\{\omega\}) - S_{i-1,n+r-i+1}(\{\omega\}) & \text{si } S_{i,n+r-i}(\{\omega\}) > 0 \end{cases}$$

et on convient que $Y_1 = S_{1,r+n-1}$.

   a. Quelle est la variable $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$?

   b. Montrer que

$$\forall k \in [\![r, n+r]\!], \qquad \mathbb{P}(Y_i = k) = \mathbb{P}\left(S_{i,n+r-i} > 0\right) q^{k-1} p.$$

   En déduire une autre démonstration du résultat de 4.

Cette création est mise à disposition selon le Contrat
Paternité-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France
disponible en ligne http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/

IV. Transitions

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère un système qui peut être dans $m+1$ états.
Une *transition* de paramètre

$$T = (t_{i\,j})_{(i,j)\in[\![1,m+1]\!]^2} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$$

est un changement aléatoire d'état dont les caractéristiques sont données par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m+1]\!]^2,\ t_{ij} = \text{ probabilité conditionnelle que}$$
$$\text{le système soit passé dans l'état } j \text{ sachant qu'il était dans l'état } i.$$

L'état $m+1$ est dit « absorbant » c'est à dire que si le système est dans cet état avant une transition, il y est encore après. Ceci se traduit par

$$t_{m+1\,m+1} = 1.$$

Les états 1 à m sont dits *transitoires*.
On considère une succession de transitions indépendantes de paramètre T.
Pour $i \in [\![1,m+1]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,, on note E_n^i l'événement

$$E_n^i = \text{ « le système est dans l'état } i \text{ après la } n\text{-ème transition » .}$$

On note aussi $A_n = E_n^{m+1}$ (absorbant) et $T_n = \overline{A}_n = E_n^1 \cup \cdots \cup E_n^m$ (transitoire).

1. Montrer que la matrice T est stochastique c'est à dire que tous ses termes sont positifs ou nuls et que pour chaque ligne, la somme des termes est 1.
2. Propriétés de T.
   a. Montrer que la matrice T s'écrit à l'aide de blocs sous la forme :
   $$T = \begin{pmatrix} Q & C \\ 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$
   Montrer que
   $$C = (I_m - Q)U \quad \text{avec } U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$
   b. En utilisant sans démonstration le produit matriciel par blocs, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = \begin{pmatrix} Q^n & (I - Q^n)U \\ 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. On écrit dans des matrices lignes les probabilités pour le système d'être dans un état particulier.
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_n^m) & \mathbb{P}(A_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\,m+1}(\mathbb{R}).$$
   On suppose que le système n'est pas dans l'état absorbant avant la première transition ce qui se traduit par
   $$L_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_n^m) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\,m+1}(\mathbb{R}).$$
   a. Montrer que $L_n = L_0\,T^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b. Exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ avec un produit matriciel.
4. On note X la variable aléatoire égale au temps d'attente du passage à l'état absorbant.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'événement $(X > n)$?
   b. Déterminer avec des produits matriciels la loi de X c'est à dire les $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
5. Exemple. Dans cette question
   $$Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & q & p \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$
   a. Calculer Q^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   b. Modéliser un système permettant de retrouver la loi du r-ième succés dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes

Cette création est mise à disposition selon le Contrat
Paternité-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France
disponible en ligne http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/