

Partie I. Calcul d'un déterminant circulant

1. a. On reconnaît un déterminant de Vandermonde. Il faut :

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\xi^j - \xi^i).$$

b. Par propriétés de la dérivation d'un produit :

$$Q' = \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (X - z_j).$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En évaluant cette expression en z_i , on voit que tous les termes de la somme sont nuls sauf celui pour lequel $k = i$, donc :

$$Q'(z_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z_i - z_j).$$

Ainsi :

$$\prod_{i=1}^n Q'(z_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Q'(z_j) = \prod_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} (z_i - z_j).$$

c. Posons $Q = X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X - \xi^i)$. D'après les relations coefficients-racines, $-1 = \prod_{k=0}^{n-1} \xi^k = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} 1$, d'où le résultat.

d. D'après la b. appliquée au polynôme $Q = X^n - 1$ et à ses racines $1, \xi, \dots, \xi^{n-1}$:

$$\prod_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} (\xi^i - \xi^j) = \prod_{i=0}^{n-1} P'(\xi^i) = \prod_{i=0}^{n-1} n(\xi^i)^{n-1}.$$

Mais pour tout i , $(\xi^i)^{n-1} = (\xi^{n-1})^i = (\xi^{-1})^i = \xi^{-i}$ car $\xi^{n-1} = \xi^{-1}$ donc :

$$\prod_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2 \\ i \neq j}} (\xi^i - \xi^j) = n^n \prod_{i=0}^{n-1} \xi^{-i} = (-1)^{n-1} n^n.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} n^n &= \prod_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2 \\ i \neq j}} (\xi^i - \xi^j) \\ &= \left[\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\xi^i - \xi^j) \right] \underbrace{\left[\prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (\xi^i - \xi^j) \right]}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ facteurs}} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\xi^i - \xi^j) \right]^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(V)^2 \end{aligned}$$

donc $\det(V)^2 = \pm n^n$. Alors il existe $\varepsilon \in \{1, -1, i, -i\}$ tel que $\det(V) = \varepsilon n^{\frac{n}{2}}$.

e. La matrice de la famille (e_0, \dots, e_{p-1}) est justement la matrice V . Son déterminant est non nul d'après la question précédente, donc elle est inversible, donc de rang n . Donc la famille (e_0, \dots, e_{n-1}) est de rang n , donc c'est une base de \mathbb{C}^n .

2. La première ligne du vecteur colonne $C(a_0, \dots, a_{n-1})E_p$ vaut :

$$a_0 + a_1 \xi^p + \dots + a_{n-1} \xi^{p(n-1)} = P(\xi^p).$$

Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. La i -ème ligne du vecteur colonne $C(a_0, \dots, a_{n-1})E_p$ vaut :

$$\begin{aligned} a_{n-i+1} + a_{n-i+2} \xi^p + \dots + a_{n-1} \xi^{p(i-2)} + a_0 \xi^{p(i-1)} + \dots + a_{n-i} \xi^{p(n-1)} \\ = \xi^{p(i-1)} [a_{n-i+1} \xi^{-p(i-1)} + a_{n-i+2} \xi^{-p(i-2)} \\ + \dots + a_{n-1} \xi^{-p} + a_0 + a_1 \xi^p + \dots + a_{n-i} \xi^{p(n-i)}]. \end{aligned}$$

Comme $\xi^{np} = 1$, alors :

$$\xi^{-p(n-i)} = \xi^{p(n-i+1)}, \dots, \xi^{-p} = \xi^{p(n-1)}.$$

Donc la i -ème ligne du vecteur colonne $C(a_0, \dots, a_{n-1})E_p$ vaut :

$$\xi^{p(i-1)} [a_0 + a_1 \xi^p + \dots + a_{n-1} \xi^{p(n-1)}] = \xi^{p(i-1)} P(\xi^p).$$

Donc $C(a_0, \dots, a_{n-1})E_p = P(\xi^p)E_p$.

3. Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $C(a_0, \dots, a_{n-1})$. D'après la question précédente, pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $u(e_p) = P(\xi^p)e_p$. Donc la matrice de u dans la base (e_0, \dots, e_{p-1}) est diagonale de coefficients diagonaux $P(1), (\xi), \dots, P(\xi^{n-1})$. Ainsi, $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} P(1) & & & \\ & P(\xi) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\xi^{n-1}) \end{pmatrix}$$

4. Le déterminant de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est égal au déterminant de la matrice diagonale ci-dessus, qui vaut :

$$\prod_{k=0}^{n-1} P(\xi^k).$$

Partie II. Module de combinaisons linéaires de racines de l'unité à coefficients aléatoires

II.1 Espérance et variance

1. a. Par définition, $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{P}(X_k = 1) - \mathbb{P}(X_k = -1) = 0$. Comme les variables sont mutuellement indépendantes :

$$X_k \neq X_l \Rightarrow \mathbb{E}(X_k X_l) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0.$$

- b. Introduisons le conjugué pour exprimer le carré du module puis utilisons la linéarité de l'espérance et la question précédente :

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= \sum_{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} X_k X_l \xi^{k-l} = n + 2 \sum_{\substack{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ k < l}} X_k X_l \xi^{k-l} \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(|Z|^2) = n + 2 \sum_{\substack{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ k < l}} \underbrace{\mathbb{E}(X_k X_l)}_{=0} \xi^{k-l} = n \end{aligned}$$

car X_k^2 est la variable constante (certaine) de valeur 1.

2. a. Comme les variables sont mutuellement indépendantes et centrées,

$$\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) \neq 0 \Rightarrow \text{Card} \{X_i, X_j, X_k, X_l\} < 4.$$

On sait que $X_i \neq X_j$ car $i < j$ et $X_k \neq X_l$ car $k < l$. Les deux paires $\{X_i, X_j\}$ et $\{X_k, X_l\}$ ne peuvent pas être disjointes. Si $X_k = X_j$ alors $k = j$ donc $j < l$ donc

$$\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = \mathbb{E}(X_i X_j X_l) = 0.$$

On en déduit $X_k = X_i$ et $\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = \mathbb{E}(X_j X_l)$ serait nul si $X_j \neq X_l$. On doit donc avoir $i = k$ et $j = l$.

- b. Comme en 1.b.

$$\begin{aligned} |Z|^4 &= \left(n + 2 \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i < j}} X_i X_j \xi^{i-j} \right) \left(n + 2 \sum_{\substack{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ k < l}} X_k X_l \xi^{k-l} \right) \\ &= n^2 + 4n \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i < j}} X_i X_j \xi^{i-j} + 4 \sum_{\substack{(i,j,k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4 \\ i < j, k < l}} X_i X_j X_k X_l \xi^{i-j+k-l} \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(|Z|^4) = n^2 + 4 \frac{n(n-1)}{2} = 3n^2 - 2n \end{aligned}$$

car dans la dernière somme, seuls les quadruplets (i, j, i, j) contribuent vraiment et chacun pour la valeur 1.

Avec $\mathbb{E}(|Z|^2) = n$, on obtient

$$\mathbb{V}(|Z|^2) = \mathbb{V}(|Z|^4) - \mathbb{E}(|Z|^2)^2 = 2n(n-1).$$

II.2. Inégalités de concentration.

1. Comme Z est une variable aléatoire à valeurs positives, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|Z|^2 \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|Z|^2)}{t} = \frac{n}{t}.$$

2. a. Introduisons une fonction f définie dans \mathbb{R} et calculons sa dérivée

$$f(x) = \text{ch}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f'(x) = (\text{sh}(x) - x \text{ch}(x))e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ avec $g(x) = \text{sh}(x) - x \text{ch}(x)$. Alors

$$g'(x) = -x \text{sh}(x) \leq 0.$$

La fonction g est décroissante dans \mathbb{R} , nulle en 0 donc positive pour les négatifs et négative pour les positifs. La fonction f admet en minimum absolu en 0 de valeur 1. On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b. On linéarise :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right) = \frac{n}{2}.$$

c. Comme les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes, les variables $e^{\theta \cos(\frac{2k\pi}{n})X_k}$ le sont aussi. Remarquons que

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta \cos(\frac{2k\pi}{n})X_k}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\theta \cos(\frac{2k\pi}{n})} + e^{-\theta \cos(\frac{2k\pi}{n})}\right) = \text{ch}\left(\theta \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\theta X}) &= \prod_{k=1}^n E\left(e^{\theta X_k \cos(\frac{2k\pi}{n})}\right) = \prod_{k=1}^n \text{ch}\left(\theta \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ &\leq \prod_{k=1}^n e^{\frac{(\theta \cos(\frac{2k\pi}{n}))^2}{2}} = e^{\frac{\theta^2}{2} \sum_{k=1}^n \cos^2(\frac{2k\pi}{n})} = e^{\frac{n\theta^2}{4}}. \end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+$, d'après l'inégalité de Markov appliquée à $e^{\theta X}$:

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta t}) \leq e^{-\theta t} \mathbb{E}(e^{\theta X}) \leq e^{-\theta t + \frac{n\theta^2}{4}}$$

4. Posons $\theta = \frac{2t}{n}$, de manière à minimiser l'expression $-\theta t + \frac{n\theta^2}{4}$. Alors :

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{n}}.$$

5. Soit $x \in C$. Alors :

$$\{X = x\} = \bigcup_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \xi^i}} \{(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n)\}.$$

La réunion est disjointe et pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$,

$\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n}$. Donc :

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\text{card}(A(x))}{2^n}$$

avec

$$A(x) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \xi^i = x\}$$

Or l'application $f : (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in A(x) \mapsto (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n) \in A(-x)$ est une bijection donc $\text{card}(A(x)) = \text{card}(A(-x))$. Donc $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x) = \mathbb{P}(-X = x)$. Ainsi, X et $-X$ ont même loi.

Ainsi, comme $\{|X| \geq t\} = \{X \geq t\} \cup \{-X \geq t\}$, alors :

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \mathbb{P}(X \geq t) + \mathbb{P}(-X \geq t) = 2\mathbb{P}(X \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{n}}.$$

6. Comme $|Z|^2 = X^2 + Y^2$, alors :

$$\{|Z|^2 \geq t\} \subset \{X^2 \geq \frac{t}{2}\} \cup \{Y^2 \geq \frac{t}{2}\}$$

(si $x^2 + y^2 \geq t$, alors l'un au moins des réels x^2 et y^2 est supérieur ou égal à $\frac{t}{2}$). Donc :

$$\{|Z|^2 \geq t\} \subset \{|X| \geq \sqrt{\frac{t}{2}}\} \cup \{|Y| \geq \sqrt{\frac{t}{2}}\}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(|Z|^2 \geq t) \leq \mathbb{P}(|X| \geq \sqrt{\frac{t}{2}}) + \mathbb{P}(|Y| \geq \sqrt{\frac{t}{2}}) \leq 4e^{-\frac{t}{2n}}.$$

Partie III. Déterminant d'une matrice circulaire aléatoire

1. a. Soit $u \in \mathbb{U}_n$. Notons $\mathcal{A} = \{J \in \Omega \mid u \in J\}$. Alors :

$$\mathbb{P}(X_u = 1) = \frac{\text{card}(\mathcal{A})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(\mathcal{A})}{2^n}.$$

Comme l'application $J \in \mathcal{A} \mapsto J^c \in \mathcal{A}^c$ est une bijection, alors \mathcal{A} et son complémentaire ont même cardinal. Mais comme \mathcal{A} et \mathcal{A}^c partitionnent Ω , alors $2^n = \text{card}(\mathcal{A}) + \text{card}(\mathcal{A}^c)$ donc $\text{card}(\mathcal{A}) = 2^{n-1}$. Donc :

$$\mathbb{P}(X_u = 1) = \mathbb{P}(X_u = -1) = \frac{1}{2}.$$

b. Soit $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{U}_n} \in \{-1, 1\}^n$. Alors

$$\bigcap_{u \in \mathbb{U}_n} \{X_u = \varepsilon_u\} = \{J \in \Omega \mid \forall u \in \mathbb{U}_n, \varepsilon_u = 1 \iff u \in J\} = \{J\}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{u \in \mathbb{U}_n} \{X_u = \varepsilon_u\}\right) = \frac{1}{2^n} = \prod_{u \in \mathbb{U}_n} \mathbb{P}(X_u = \varepsilon_u).$$

Ainsi, les variables aléatoires X_u sont mutuellement indépendantes.

2. a. Comme \mathbb{U}_n est fini, il suffit de montrer que φ_k est injective. Soient $u, v \in \mathbb{U}_n$ tels que $\varphi_k(u) = \varphi_k(v)$. Il existe $p, q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $u = e^{\frac{2ip\pi}{n}}$ et $v = e^{\frac{2iq\pi}{n}}$, donc $e^{\frac{2ik(p-q)\pi}{n}} = 1$. Donc n divise $k(p-q)$. Comme n est premier et $1 \leq k < n$, alors n est premier avec k donc d'après le théorème de Gauss, n divise $(p-q)$. Mais comme $-n < p-q < n$, alors $p = q$ et $u = v$; L'application φ_k est bien injective donc bijective.

b. Soit $J \in \Omega$. Alors pour tout $u \in \mathbb{U}_n$, $X_{\varphi_k^{-1}(u)}(J) = X_u(\overline{\varphi_k}(J))$. Donc le changement d'indice $v = \varphi_k(u)$ donne :

$$\begin{aligned} Z_k(J) &= \sum_{u \in \mathbb{U}_n} X_u(J) \varphi_k(u) = \sum_{v \in \mathbb{U}_n} X_{\varphi_k^{-1}(v)}(J) v \\ &= \sum_{v \in \mathbb{U}_n} X_v(\overline{\varphi_k}(J)) v = Z_1 \circ \overline{\varphi_k}(J). \end{aligned}$$

c. Ainsi, comme $\overline{\varphi_k}$ est bijective, alors $Z_k(\Omega) = Z_1(\Omega)$ et pour tout $z \in Z_k(\Omega)$:

$$\{Z_k = z\} = \{Z_1 \circ \overline{\varphi_k} = z\} = \overline{\varphi_k}(\{Z_1 = z\}).$$

Comme $\overline{\varphi_k}$ est bijective, alors les ensembles $\{Z_1 = z\}$ et $\overline{\varphi_k}(\{Z_1 = z\})$ ont même cardinal, donc même probabilité :

$$\mathbb{P}(Z_k = z) = \mathbb{P}(Z_1 = z).$$

Donc Z_k et Z_1 ont même loi.

3. Soit $J \in \Omega$. Notons P_J le polynôme :

$$P_J = \sum_{k=0}^{n-1} X_{\xi^k} \xi^k = \sum_{u \in \mathbb{U}_n} X_u(J) u^k = Z_k(J).$$

D'après la partie I :

$$D(J) = \prod_{p=0}^{n-1} |P_J(\xi^p)| = \prod_{k=0}^{n-1} |Z_k(J)|.$$

Mais pour tout $k \in \llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$:

$$Z_{n-k}(J) = \sum_{u \in \mathbb{U}_n} X_u(J) u^{n-k} = \sum_{u \in \mathbb{U}_n} X_u(J) u^{-k} = \sum_{u \in \mathbb{U}_n} X_u(J) \overline{u^k} = \overline{Z_k(J)}.$$

Donc en particulier : $|Z_k(J)| = |Z_{n-k}(J)|$. Ainsi :

$$|Z_1(J)| = |Z_{n-1}(J)|, |Z_2(J)| = |Z_{n-2}(J)|, \dots, \left|Z_{\frac{n-1}{2}}(J)\right| = \left|Z_{\frac{n+1}{2}}(J)\right|.$$

Donc :

$$D(J) = |Z_0(J)| \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |Z_k(J)|^2.$$

4. Soit $t > 0$. Alors :

$$\{M \geq t\} = \bigcup_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \{|Z_k|^2 \geq t\}$$

donc :

$$\mathbb{P}(M \geq t) \leq \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{P}(|Z_k|^2 \geq t) = \frac{n-1}{2} \mathbb{P}(|Z_1|^2 \geq t)$$

puisque les Z_k ont la même loi que Z_1 . Mais comme Z_1 a la même loi que la variable aléatoire Z introduite dans la partie II, alors :

$$\mathbb{P}(|Z_1|^2 \geq t) \leq 4e^{-\frac{t}{2n}}$$

donc :

$$\mathbb{P}(M \geq t) \leq 2(n-1)e^{-\frac{t}{2n}}.$$

5. Il suffit de remarquer que pour tout $J \in \Omega$:

$$|D(J)| \leq |Z_0(J)| |M(J)|^{\frac{n-1}{2}}.$$

Comme $|Z_0(J)| \leq n$, alors $|D(J)| \leq nM(J)^{\frac{n-1}{2}}$. Donc :

$$\{D \geq nt^{\frac{n-1}{2}}\} \subset \{nM^{\frac{n-1}{2}} \geq nt^{\frac{n-1}{2}}\} = \{M \geq t\}$$

donc :

$$\mathbb{P}(D \geq nt^{\frac{n-1}{2}}) \leq 2(n-1)e^{-\frac{t}{2n}}.$$

6. a. Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(W) = \sum_{w \in W(\Omega)} w \mathbb{P}(W = w) = \sum_{k=0}^p \sum_{w \in W(\Omega) \cap [k, k+1[} w \mathbb{P}(W = w).$$

Mais pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W(\Omega) \cap [k, k+1[} w \mathbb{P}(W = w) &\leq (k+1) \sum_{w \in W(\Omega) \cap [k, k+1[} \mathbb{P}(W = w) \\ &= (k+1) \mathbb{P}(k \leq W < k+1) \\ &= (k+1) [\mathbb{P}(W \geq k) - \mathbb{P}(W \geq k+1)] \end{aligned}$$

Cela donne le résultat souhaité.

b. Coupons la somme en deux, effectuons un changement d'indice dans la deuxième somme puis regroupons les termes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &\leq \sum_{k=0}^p (k+1) [\mathbb{P}(W \geq k) - \mathbb{P}(W \geq k+1)] \\ &= \sum_{k=0}^p (k+1) \mathbb{P}(W \geq k) - \sum_{k=0}^p (k+1) \mathbb{P}(W \geq k+1) \\ &= \sum_{k=0}^p (k+1) \mathbb{P}(W \geq k) - \sum_{l=1}^{p+1} l \mathbb{P}(W \geq l) \quad (l = k+1) \\ &= \sum_{k=0}^p (k+1) \mathbb{P}(W \geq k) - \sum_{k=1}^p k \mathbb{P}(W \geq k) \quad (\mathbb{P}(W \geq p+1) = 0) \\ &= \mathbb{P}(W \geq 0) + \sum_{k=1}^p [(k+1) - k] \mathbb{P}(W \geq k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^p \mathbb{P}(W \geq k) \quad (\mathbb{P}(W \geq 0) = 1) \end{aligned}$$

7. a. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour tout $J \in \Omega$, $|Z_k(J)| \leq n$ (inégalité triangulaire) donc $0 \leq D(J) \leq n^n$.
b. D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(D) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n^n} \mathbb{P}(D \geq k).$$

Mais d'après la question 5, en posant $t = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}$:

$$\mathbb{P}(D \geq k) = \mathbb{P}(D \geq nt^{\frac{n-1}{2}}) \leq 2(n-1)e^{-\frac{t}{2n}} = e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}}$$

donc :

$$\mathbb{E}(D) \leq 1 + 2(n-1) \sum_{k=1}^{n^n} e^{-\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}}{2n}}$$

c. Un intégration par parties donne pour $k \geq 1$:

$$\int_0^{k/2} t^n e^{-t} dt = [-kt^{k-1} e^{-t}]_0^{k/2} + k \int_0^{k/2} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

Comme :

$$[-kt^{k-1} e^{-t}]_0^{k/2} = -k \left(\frac{k}{2}\right)^{k-1} e^{-k/2} \leq 0$$

donc :

$$\int_0^{k/2} t^k e^{-t} dt \leq k \int_0^{k/2} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

Une simple récurrence montre alors que :

$$\int_0^{k/2} t^k e^{-t} dt \leq k! \underbrace{\int_0^{k/2} e^{-t} dt}_{=1-e^{-k/2} \leq 1} \leq k!.$$

d. Notons i l'intégrale à calculer. Effectuons d'abord le changement de variables $ny = x$, $ndy = dx$. Alors :

$$I = n \int_0^{n^{n-1}} e^{-y^{\frac{2}{n-1}}} dy.$$

Effectuons ensuite le changement de variables $t^{\frac{n-1}{2}} = y$, $\frac{n-1}{2}t^{\frac{n-3}{2}} dt = dy$:

$$I = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^{n^2} e^{-\frac{t}{2n}} t^{\frac{n-3}{2}} dt.$$

Effectuons enfin le changement de variables $2nu = t$, $2ndu = dt$:

$$I = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^{n/2} e^{-u} (2nu)^{\frac{n-3}{2}} (2n) du = \frac{n(n-1)(2n)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \int_0^{n/2} e^{-u} u^{\frac{n-3}{2}} du$$

donc d'après la question précédente :

$$I \leq \frac{n(n-1)}{2} (2n)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)! = n \left(\frac{n-1}{2}\right)! (2n)^{\frac{n-1}{2}}.$$

e. Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x^2}{2n}}$. Cette fonction est décroissante donc pour tout $k \in \llbracket 1, n^n \rrbracket$:

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx.$$

Donc en sommant, la relation de Chasles donne :

$$\sum_{k=1}^{n^n} f(k) \leq \int_0^{n^n} f(x) dx.$$

La question 7 appliquée à $W = D$ et le calcul précédent donnent la majoration souhaitée.