Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel non nul et $\xi$ le complexe $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

## Partie I Calcul d'un déterminant circulant

Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $P$ le polynôme :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X].$$

Cette partie a pour but de calculer le déterminant de $C(a_0, ..., a_{n-1})$ défini par

$$C(a_0, ..., a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. Notons $V = (\xi^{(j-1)(i-1)})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{n-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi^{n-1} & \xi^{2(n-1)} & \dots & \xi^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

   a. Donner sans démonstration une expression de $\det(V)$.

   b. Soit $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes et $Q = (X - z_1)\cdots(X - z_n)$. Montrer que
   $$\prod_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} (z_j - z_i) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} Q'(z_i)$$

   c. En factorisant $X^n - 1$, montrer que $\prod_{k=0}^{n-1} \xi^k = (-1)^{n-1}$.

   d. En déduire que $\det(V) = \varepsilon n^{\frac{n}{2}}$ avec $\varepsilon \in \{1, -1, i, -i\}$.

   e. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, notons :
   $$e_p = (1, \xi^p, \xi^{2p}, ..., \xi^{(n-1)p}) \in \mathbb{C}^n.$$
   Montrer que la famille $(e_0, ..., e_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

2. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, notons $E_p$ la matrice colonne représentant le vecteur $e_p$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ :
$$E_p = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^p \\ \xi^{2p} \\ \vdots \\ \xi^{p(n-1)} \end{pmatrix}$$
Montrer que $C(a_0, ..., a_{n-1})E_p = P(\xi^p)E_p$.

3. Montrer que la matrice $C(a_0, ..., a_{n-1})$ est semblable à une matrice diagonale que l'on explicitera.

4. Montrer que :
$$\det(C(a_0, ..., a_{n-1})) = \prod_{p=0}^{n-1} P(\xi^p).$$

## Partie II Combinaisons de racines de l'unité à coefficients aléatoires

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires définies sur $\Omega$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes et telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ la variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$Z(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera $|Z|^k$ la variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$|Z|^k(\omega) = |Z(\omega)|^k.$$

### II.1 Espérance et variance

1. a. Soient $1 \leq k < l \leq n$. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X_k)$ puis de $\mathbb{E}(X_k X_l)$.

   b. En déduire que $\mathbb{E}(|Z|^2) = n$.

2. a. Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$ et $k < l$. Montrer que $\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) \neq 0$ si et seulement si $i = k$ et $j = l$.

   b. Calculer $\mathbb{E}(|Z|^4)$ puis $\mathbb{V}(|Z|^2)$.





Rémy Nicolai Benoît SaleurS1910E

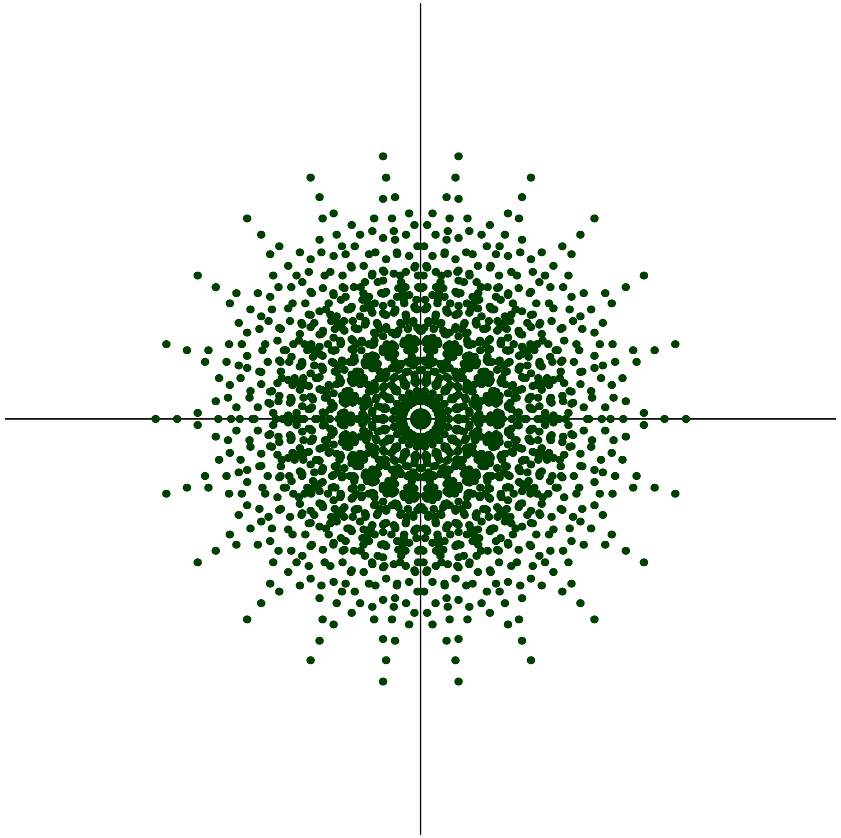

FIG. 1: Valeurs de $Z$ pour $n = 11$

### II.2 Inégalités de concentration.

Dans toute cette partie, $t$ désigne un réel strictement positif.

1. Montrer que :
$$\mathbb{P}(|Z|^2 \geq t) \leq \frac{n}{t}.$$

La suite de la partie II.2 est consacrée à la démonstration d'une meilleure majoration.

Notons $X$ et $Y$ les variables aléatoires définies pour tout $\omega \in \Omega$ par :
$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad Y(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

2. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$. On pourra dériver deux fois la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \operatorname{ch}(x)$.

   b. Calculer la somme :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

   c. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ :
$$\mathbb{E}(e^{\theta X}) \leq e^{\frac{n\theta^2}{4}}.$$

3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$ :
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\theta t + \frac{n\theta^2}{4}}.$$

4. En déduire que :
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{n}}.$$

5. Montrer que $X$ et $-X$ ont même loi et en déduire que :
$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{n}}.$$

On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ :
$$\mathbb{P}(|Y| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{n}}.$$

6. Comparer les événements $\{|Z|^2 \geq t\}$ et $\{|X| \geq \sqrt{\frac{t}{2}}\} \cup \{|Y| \geq \sqrt{\frac{t}{2}}\}$. En déduire que :
$$\mathbb{P}(|Z|^2 \geq t) \leq 4e^{-\frac{t}{2n}}.$$





Rémy Nicolai Benoît SaleurS1910E

## Partie III. Déterminant d'une matrice circulante aléatoire

Dans cette partie, **l'entier $n$ est supposé premier impair**.
On rappelle que $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines $n$-èmes de l'unité.
On munit l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{U}_n)$ des parties de $\mathbb{U}_n$ de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$.
Pour tout $u \in \mathbb{U}_n$, on note $X_u : \Omega \to \{-1, 1\}$ la variable aléatoire définie sur $\Omega$ par :

$$\forall J \in \Omega,\ X_u(J) = \begin{cases} 1 \text{ si } u \in J \\ -1 \text{ si } u \notin J \end{cases}$$

1. a. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{U}_n$ :

$$\mathbb{P}(X_u = 1) = \mathbb{P}(X_u = -1) = \frac{1}{2}.$$

   b. Montrer que les variables aléatoires $X_u$ ($u \in \mathbb{U}_n$) sont mutuellement indépendantes.

   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons $Z_k : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la variable aléatoire définie pour tout $J \in \Omega$ par :

$$Z_k(J) = \sum_{u \in \mathbb{U}_n}^{n} X_u(J) u^k.$$

   Ainsi, la variable aléatoire $Z_1$ a la même loi que la variable aléatoire $Z$ définie dans la partie II.

2. On rappelle que $n$ est premier. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

   a. Montrer que l'application $\varphi_k : u \in \mathbb{U}_n \mapsto u^k \in \mathbb{U}_n$ est une bijection.
   On note $\overline{\varphi_k} : J \in \Omega \mapsto \varphi_k(J) \in \Omega$ la bijection qui à toute partie $J$ de $\mathcal{P}(\mathbb{U}_n)$ associe son image directe par $\varphi_k$.

   b. Montrer que $Z_k = Z_1 \circ \overline{\varphi_k}$.

   c. En déduire que $Z_k$ et $Z_1$ ont même loi.

   On note $D : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall J \in \Omega,\ D(J) = \left|\det(C(X_{\xi^0}(J), X_{\xi^1} \dots, X_{\xi^{n-1}}(J)))\right|.$$

3. Montrer à l'aide de la partie I que pour tout $J \in \Omega$ :

$$D(J) = |Z_0(J)| \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |Z_k(J)|^2.$$

4. Posons $M : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la variable aléatoire définie pour tout $J \in \Omega$ par :

$$M(J) = \max_{k \in [\![1, \frac{n-1}{2}]\!]} |Z_k(J)|^2.$$

   Montrer à l'aide de la partie II que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$\mathbb{P}(M \geq t) \leq 2(n-1)e^{-\frac{t}{2n}}.$$

5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$\mathbb{P}(D \geq nt^{\frac{n-1}{2}}) \leq 2(n-1)e^{-\frac{t}{2n}}.$$

6. Soit $W : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une variable aléatoire, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $W(\Omega) \subset [0, p]$.

   a. Montrer que :

$$\mathbb{E}(W) \leq \sum_{k=0}^{p} (k+1)(\mathbb{P}(W \geq k) - \mathbb{P}(W \geq k+1)).$$

   b. Montrer que :

$$\mathbb{E}(W) \leq 1 + \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(W \geq k).$$

7. a. Montrer que $D(\Omega) \subset [0, n^n]$.

   b. Montrer que :

$$\mathbb{E}(D) \leq 1 + 2(n-1) \sum_{k=1}^{n^n} \exp\left(-\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}}{2n}\right).$$

   c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\int_0^{k/2} t^k e^{-t}\, dt \leq k!.$$

   d. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{n^n} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}}{2n}\right)\, dx.$$

   e. En déduire que :

$$\mathbb{E}(D) \leq 1 + n \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right] (2n)^{\frac{n-1}{2}}.$$