1. (Eao01) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
   a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe une matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ vérifiant $AX = \lambda X$. Montrer que $\lambda$ est imaginaire pur. (On pourra considérer ${}^t\overline{X}AX$)
   Si on suppose $A$ symétrique réelle et $\lambda$ comme au dessus. Que peut-on dire de $\lambda$ ?
   b. On revient au cas antisymétrique.
   Montrer que $I_n + A$ est inversible et que
   $$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in O_n^+(\mathbb{R})$$
   (voir l'exercice ao05)
2. (Eao02) Trouver les éléments géométriques des matrices orthogonales suivantes :
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & -2a \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 2a & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$
3. (Eao03) Vérifier que la matrice suivante est orthogonale puis l'écrire comme un produit de deux matrices de rotations dont on précisera les éléments géométriques.
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
4. (Eao04) Soit $E$ euclidien orienté de dimension 3. On se donne un vecteur unitaire $\overrightarrow{v}$ et un réel $\theta$. Montrer que l'application qui à $\overrightarrow{x}$ associe
$$\cos\theta\,[(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{x})\wedge\overrightarrow{v}] + \sin\theta\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{v}/\overrightarrow{x})\overrightarrow{v}$$
   est la rotation d'angle $\theta$ autour de $\overrightarrow{v}$.
5. (Eao05) Soit $E$ euclidien orienté de dimension 3,
$$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$$
   une base orthonormée directe de $E$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma)$ dans $\mathcal{B}$ et
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$
   On note
$$U = (I - A)(I + A)^{-1}$$
   et $f$ l' endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $U$.
   On note $\varphi_{\overrightarrow{v}}$ l'application définie par
$$\varphi_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{x}$$
   Quelle est la matrice de $\varphi_{\overrightarrow{v}}$ dans $\mathcal{B}$ ? Exprimer $f$ comme une composition d'endomorphismes. Calculer la matrice de $f$ dans une base orthonormée directe
$$\mathcal{U} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v})$$
   En déduire que $f$ est une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$, déterminer l'angle autour de $\overrightarrow{v}$.
   (voir l'exercice ao01)
6. (Eao06) On considère une matrice $3\times 3$ réelle
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$
   Montrer que $A \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si
$$\exists\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right] \text{ tq } (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - X^2 + \lambda$$
   La condition précédente étant réalisée, poser
$$\lambda = \frac{4}{27}\sin^2\phi$$
   et déterminer les éléments géométriques de la rotation représentée par $A$ dans une base orthonormée directe d'un espace euclidien.[1]
7. (Eao07) Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de norme 1 dans un espace euclidien orienté de dimension 3.
   L'endomorphisme $\phi_{\overrightarrow{v}} \in \mathcal{L}(E)$ est défini par
$$\phi_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{x}$$
   Montrer que $\phi_{\overrightarrow{v}}$ restreint à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})^\perp$ est une rotation. Préciser l'angle si $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})^\perp$ est orienté autour de $\overrightarrow{v}$.
8. (Eao08) **Inégalité de Hadamard**
   On considère un espace vectoriel euclidien $E$ muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible fixée. On définit la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ par
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = A$$
   Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ la famille obtenue par l'orthogonalisation de Schmidt à partir de $(u_1, \cdots, u_n)$ .
   a. Montrer que chaque $v_i$ est l'image de $u_i$ par une projection orthogonale qui dépend de $i$. En déduire que $\|v_i\| \leq \|u_i\|$.
   b. Soit $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$. En formant une base orthonormée à partir de $(v_1, \cdots, v_n)$, exprimer $|\det A'|$ comme un produit de normes.
   c. Soit $P$ la matrice de passage des $u_i$ aux $v_i$, exprimer $A'$ en fonction de $A$ et $P$. Que peut-on dire de $P$ et de ses termes diagonaux ?
   d. Montrer que
$$|\det A| \leq \|u_1\|\,\|u_2\|\cdots\|u_n\|$$
   Quand l'égalité se produit-elle ?

[1] voir aussi le problème rot.pdf



Rémy Nicolai _fex_aopdf du 11 juin 2019

9. (Eao09) Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$.
   a. **Hyperplan médiateur**. Soit $u$ et $v$ deux vecteurs non nuls et de même norme dans $E$. Montrer qu'il existe une unique reflexion $s$ telle que $s(u) = v$.
   b. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. En raisonnant par récurrence descendante sur
   $$k = \dim\left(\ker(f - \underset{E}{\mathrm{Id}})\right)$$
   pour $k < n$, montrer qu'il existe des réflexions $r_1, \cdots, r_p$ (avec $p \leq n - k$) telles que
   $$f = r_1 \circ \cdots \circ r_p$$
10. (Eao10) Soit $E$ un espace euclidien de dimension $p$ dont le produit scalaire est noté $(./.)$ et $\mathcal{U}$ une base orthonormée de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A$ la matrice de $f$ dans $\mathcal{U}$. On appelle *adjoint* de $f$ l'endomorphisme noté ${}^tf$ tel que :
   $$\underset{\mathcal{U}}{\mathrm{Mat}}\, {}^tf = {}^tA$$
   a. Soit $\mathcal{V}$ une base orthonormée quelconque, montrer que
   $$\underset{\mathcal{V}}{\mathrm{Mat}}\, {}^tf = {}^t\underset{\mathcal{V}}{\mathrm{Mat}}\, f$$
   b. Montrer que $(f(x)/y) = (x/{}^tf(y))$ pour tous les $x$ et $y$ de $E$.
   c. Montrer que
   $$\ker {}^tf = (\mathrm{Im}\, f)^\perp, \qquad \mathrm{Im}\, {}^tf = (\ker f)^\perp$$
   d. On suppose $f$ non surjective et $y$ en dehors de $\mathrm{Im}\, f$. L'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ n'admet donc aucune solution. Montrer que l'équation
   $${}^tf \circ f(x) = {}^tf(y)$$
   admet des solutions. Montrer que si $x_0$ est une solution de cette équation alors :
   $$\forall x \in E : \|f(x_0) - y\| \leq \|f(x) - y\|$$
   e. On dit que $f$ est *normal* si et seulement si
   $${}^tf \circ f = f \circ {}^tf$$
   Soit $A$ un sous-espace stable par un endomorphisme normal $f$. Montrer que $A^\perp$ est stable par $f$.
11. (Eao11) Dans un espace euclidien orienté soit $r$ une rotation d'angle $\alpha$ autour d'un vecteur unitaire $w$. Soit $g$ une rotation quelconque. Montrer que $g \circ r \circ g^{-1}$ est une rotation d'angle $\alpha$ autour de $g(w)$. Que se passe-t-il si $g$ est orthogonal mais indirect ?
12. Eao12 Soit $x$, $y$, $z$ les fonctions coordonnées relatives à une base $(\overrightarrow{i}\, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ supposée orthonormée directe. Trouver une base orthonormée directe $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ avec
   $$\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$$
   Préciser les matrices de passage entre ces deux bases puis exprimer $xy + yz + zx$ avec les fonctions coordonnées $X$, $Y$, $Z$ dans la nouvelle base.
13. Eao13 Soit $x$ et $y$ deux vecteurs dans $E$ euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que
   $$f(x \wedge y) = \varepsilon f(x) \wedge f(y)$$
   avec $\varepsilon = 1$ si $f$ est directe et $\varepsilon = -1$ si $f$ est indirecte. En déduire une expression de
   $$f \circ \varphi_x \circ f^{-1}$$
14. Eao14 Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3.
   a. Soit $f$ une rotation qui n'est pas l'identité. Sous quelle condition existe-t-il un vecteur $x$ non nul tel que $x$ soit orthogonal à $f(x)$ ? Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k$ vérifie cette condition.
   b. Soit $f$ une rotation pour laquelle il existe un $x$ non nul orthogonal à $f(x)$, soit $t_x$ le retournement d'axe $\mathrm{Vect}(x)$. Montrer que $t_x \circ f \circ t_x \circ f^{-1}$ est un retournement.
   c. Soit $f$ une rotation et $r$ un retournement, montrer que $f \circ r \circ f^{-1}$ est un retournement.
   d. Un sous groupe $H$ d'un groupe $G$ est dit *distingué* si et seulement si :
   $$\forall g \in G, \forall h \in H : \; ghg^{-1} \in H$$
   Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathcal{O}^+(E)$ ?
15. (Eao15) Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ trois bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.
   a. Interpréter la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{B}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{A}$ comme la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
   b. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U$ triangulaire supérieure et $P$ orthogonale telles que $A = PU$.
   c. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $L$ triangulaire inférieure et $P$ orthogonale telles que $A = LP$.
16. (Eao16) Dans un espace euclidien orienté, soit $f$ une rotation d'angle $\theta$ autour de $w$ et $q$ le projection orthogonale sur le plan orthogonal à $w$. Montrer que :
   $$\forall x \in E, \; \det(x, f(x), w) = \|q(x)\|^2 \sin\theta$$
   et si $f$ est une rotation miroir ?
17. (Eao17) Former par deux méthodes différentes la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $w$ de coordonnées $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{C}$.
   – Méthode 1 : changement de base.
   – Méthode 2 : parties symétriques et antisymétriques.
18. (Eao18) Former la matrice, relativement à une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $w$ de coordonnées $(1, 1, -1)$ dans $\mathcal{B}$.
19. (Eao19) Soit $E$ euclidien
   a. Soit $f \in O(E)$. Montrer que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$ si et seulement si $f(x)$ est orthogonal à $x$ pour tous les $x$ de $E$.
   b. Soit $f \in O(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. Montrer que la dimension de $E$ est paire. Soit
   $$\mathcal{S} = (x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \cdots, x_p, f(x_p), x_{p+1})$$

une famille libre et orthogonale. Montrer que la famille

$$(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \cdots, x_p, f(x_p), x_{p+1}, f(x_{p+1}))$$

est encore libre et orthogonale. En déduire que, si $\dim(E) = 2n$, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de $f$ est la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

20. (Eao20) Soit $f$ une isométrie vectorielle d'un espace euclidien $E$ et $A$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$. Montrer que $A^\perp$ est stable par $f$.
21. (Eao21) Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
À $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ bases orthonormées , on associe le nombre

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!](u(e_i)/e'_j)^2}$$

Montrer qu'il est indépendant des bases orthonormées.

1. pas de correction pour Eao01.tex
2. (Cao02) Pour chaque matrice, on indique les coordonnées du vecteur $u$ de l'axe obtenu par antisymétrisation, le coefficient $\pm 1$ de son image et la nature de l'automorphisme orthogonal.

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} :$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} : \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad 1$$

rotation d'angle $\arccos\frac{7}{18}$ autour de $u$.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} : \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad -1$$

rotation miroir d'angle $\arccos\frac{2}{3}$ autour de $u$.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} : \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1$$

rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $u$.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} : \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad 1$$

rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $u$.
3. pas de correction pour Eao03.tex
4. (Cao04) Posons

$$\overrightarrow{a} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{x}\|}\,(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{x}) \wedge \overrightarrow{v},$$
$$\overrightarrow{b} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{x}\|}\,(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{x}).$$

On vérifie que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée directe. La fonction proposée n'est que la transcription vectorielle de la rotation d'angle $\theta$ autour de $\overrightarrow{v}$ définie par sa matrice dans une base orthonormée directe dont $\overrightarrow{v}$ est le troisième vecteur.
5. pas de correction pour Eao05.tex
6. pas de correction pour Eao06.tex
7. pas de correction pour Eao07.tex
8. pas de correction pour Eao08.tex
9. pas de correction pour Eao09.tex
10. (Cao10) à compléter
   a.
   b.
   c.
   d.
   e. On complète une base orthonormée du sous-espace stable $A$ pour former une base orthonormée $\mathcal{U}$ de $E$. La stabilité se traduit par un bloc nul.

$$M = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{U}}(f) = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

Il s'agit de montrer que le bloc $V$ est nul. Traduisons le caractère normal

$${}^tM = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ {}^tV & {}^tW \end{pmatrix},\ M{}^tM = M{}^tM \Rightarrow$$
$$U{}^tU + V{}^tV = {}^tUU$$

en considérant seulement le bloc en haut à gauche. On termine en prenant la trace. Il reste seulement

$$\operatorname{tr} V{}^tV = 0$$

La somme des carrés des coefficients de $V$ est nulle, le bloc $V$ est nul.
11. pas de correction pour Eao11.tex
12. (Cao12) On choisit pour $\overrightarrow{I}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{K}$, par exemple

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$$

La famille $(\overrightarrow{K}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I})$ est alors orthonormée directe. On peut donc choisir

$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k})$$

Notons $\mathcal{A} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$. Ce sont des matrices orthogonales transposées l'une de l'autre :

$$P_{\mathcal{AB}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$P_{\mathcal{BA}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}X + Y + \sqrt{2}Z) \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{3}X + Y + \sqrt{2}Z) \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2Y + \sqrt{2}Z) \end{cases}$$

puis

$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}\left(\underbrace{(x+y+z)}_{\sqrt{3}Z}{}^2 - \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{X^2+Y^2+Z^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2Z^2 - X^2 - Y^2\right).$$

13. pas de correction pour Eao13.tex

14. (Cao14)

a. On suppose que $f$ est une rotation d'angle $\theta$ autour de $w$ unitaire. Soit $a, b, c$ les coordonnées d'un vecteur $x$ dans une base orthonormée directe $(u, v, w)$. Alors :
$$(f(x)/x) = (a^2 + b^2)\cos\theta + c^2.$$
On en déduit qu'il existe $x$ orthogonal à son image si et seulement si $\cos\theta < 0$. On remarque que cette condition est indépendante de l'orientation de l'axe. Orientons l'axe de manière à ce que $\theta \in ]0, \pi[$. La condition devient alors $\theta > \frac{\pi}{2}$. Comme l'angle de $f^k$ autour de $w$ est $k\theta$, il existe évidemment un entier $k$ tel que $k\theta > \frac{\pi}{2}$.

b. Comme $x$ est orthogonal à $f(x)$ et que, comme $f$, la bijection réciproque $f^{-1}$ conserve l'orthogonalité, $x$ est aussi orthogonal à $f^{-1}(x)$. On peut alors calculer les images de $x$ et de $f(x)$ par $g = t_x \circ f \circ t_x \circ f^{-1}$
$$\begin{aligned} &x \to f^{-1}(x) \to -f^{-1}(x) \to -x \to -x \\ &f(x) \to x \to x \to f(x) \to -f(x) \end{aligned}$$
On en déduit que $g$ est soit $-\operatorname{Id}_E$ soit le retournement d'axe la droite perpendiculaire au plan $\operatorname{Vect}(x, f(x))$. La première éventualité est impossible car $\det g = 1$.

c. Soit $g = f \circ r \circ f^{-1}$ alors $g^2 = \operatorname{Id}_E$ et $\det(g) = \det(r) = 1$ donc $g$ est un retournement. On vérifie immédiatement que son axe est $\operatorname{Vect}(f(x))$ si $\operatorname{Vect}(x)$ est l'axe du retournement $r$.

d. Si $H$ est un sous-groupe distingué de $SO(E)$ qui n'est pas réduit à l'identité. Soit $g \neq \operatorname{Id}_E$ une rotation dans $H$. Alors $H$ contient aussi une rotation $f = g^k$ pour laquelle $x$ est orthogonal à $f(x)$. D'après b., $H$ contient alors un retournement de la forme $t_x \circ f \circ t_x \circ f^{-1}$. D'après c., il contient *tous* les retournements. Comme toute rotation est la composée de deux retournements $H = SO(E)$. Les seuls sous-groupes distingués de $SO(E)$ sont donc $SO(E)$ lui même est le singleton réduit à l'identité.

15. (Cao15)

a. Notons $C_j$ la colonne $j$ du produit matriciel, soit
$$C_j = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} a_j$$
Notons $\lambda_1, \cdots \lambda_p$ les coordonnées de $a_j$ dans $\mathcal{B}$, alors :
$$\begin{aligned} C_j = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} &= \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} (\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_p b_p) \\ &= \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(a_j) \Rightarrow \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{A} \end{aligned}$$

b. On considère un espace euclidien $E$ avec une base orthonormée $\mathcal{E}$. On *définit* une famille de vecteurs $\mathcal{A}$ par $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{A} = A$. Comme $A$ est inversible, $\mathcal{A}$ est une base. Soit $\mathcal{B}$ la famille orthonormale obtenue à partir de $\mathcal{A}$ par la méthode de Gram-Schmidt.
Notons $U$ la matrice de passage $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$, elle est triangulaire supérieure par construction.
Notons $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B}$, elle est orthogonale car les deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ sont orthonormées. De plus, d'après b.
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{A} \Rightarrow PU = A$$

c. On applique la question précédente à ${}^tM$. Il existe $P_1$ orthogonale et $U_1$ triangulaire supérieure telles que ${}^tM = P_1 U_1$. Alors $P = {}^tP_1$ et $L = {}^tU_1$ satisfont aux conditions.

16. pas de correction pour Eao16.tex

17. pas de correction pour Eao17.tex

18. (Cao18) On considère la base orthonormée directe $\mathcal{U} = (u, v, \frac{1}{\sqrt{3}} w)$ avec $u$ de coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ dans $\mathcal{B}$ pour laquelle $v = w \wedge u$.
$$P_{\mathcal{BU}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \; P_{\mathcal{UB}} = {}^tP_{\mathcal{BU}}$$
La matrice cherchée est
$$\begin{aligned} P_{\mathcal{BU}} &\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{\mathcal{UB}} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

19. (Cao19)

a. Si $f$ est orthogonale et vérifie $f \circ f = -\operatorname{Id}_E$. Pour tout $x \in E$,
$$\begin{aligned} (x/f(x)) = (f(x)/f^2(x)) &= -(f(x)/x) \\ &\Rightarrow (x/f(x)) = 0 \end{aligned}$$
Réciproquement, considérons $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ une base orthonormée. Alors
$$(f(b_i + b_j)/b_i + b_j) = 0 \Rightarrow (f(b_i)/b_j) + (f(b_j)/b_i) = 0$$
On en déduit que la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique. Or la transposée de cette matrice est la matrice de $f^{-1}$ car $f$ est orhogonale. On en déduit que $f^{-1} = -f$ ce qui revient à $f \circ f = -\operatorname{Id}_E$.

b. La dimension de l'espace est impaire car $(\det f)^2 = (-1)^{\dim E}$. Supposons l'existence d'une combinaison linéaire puis composons par $f$
$$\begin{aligned} f(x_{p+1}) = \lambda_1 x_1 + \mu_1 f(x_1) + \cdots + \\ \lambda_p x_p + \mu_p f(x_p) + \lambda x_{p+1} \\ \Rightarrow -x_{p+1} = \lambda_1 f(x_1) - \mu_1 x_1 + \cdots + \\ \lambda_p f(x_p) - \mu_p x_p + \lambda f(x_{p+1}) \end{aligned}$$

En reportant l'expression de $f(x_{p+1})$, on obtient une relation linéaire entre les vecteurs de $\mathcal{S}$ dont le coefficient de $x_{p+1}$ est $1+\lambda^2$ ce qui est impossible.
Le raisonnement est facile par récurrence en partant d'un sous-espace $\operatorname{Vect}(x_1, f(x_1))$ et en prenant chaque fois un vecteur qui n'est pas dans le sous-espace déjà formé.

20. pas de correction pour Eao20.tex

21. (Cao21) Notons $M$ la matrice des $(u(e_i)/e'_j)$ et $s$ la somme des carrés de ses termes. Comme $\mathcal{B}'$ est orthonormée, cette matrice est la matrice de l'endomorphisme $u$ dans les bases $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et $\mathcal{B}'$ pour l'espace d'arrivée. Le nombre considéré s'interprète comme un trace :
$$M = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(u), \qquad s = \operatorname{tr}\left({}^tM\, M\right)$$
Considèrons de nouvelles bases orthonormées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ et notons
$$P = P_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}_1}, \quad P' = P_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}'_1}, \quad M_1 = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}(u)$$
Comme les bases sont orthonormées, les inverses des matrices de passage sont les transposées. La formule de changement de base conduit à
$$\begin{aligned} M_1 = {}^tP'\, M\, P \Rightarrow & \\ \operatorname{tr}\left({}^tM_1\, M_1\right) &= \operatorname{tr}\left({}^t\left({}^tP'\, M\, P\right)\,\left({}^tP'\, M\, P\right)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left({}^tP\,{}^tM\,(P'\,{}^tP')\, M\, P\right) \\ &= \operatorname{tr}\left({}^tM\, M\, P\,{}^tP\right) \text{ ( en permutant dans la trace)} \\ &= s \end{aligned}$$