1. (Ecp01) Soit $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ simplifier $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{a+b}{1-ab}$.
2. (Ecp02) Soit z un nombre complexe vérifiant
$$z^3 + pz + q = 0$$
montrer que
$$|z| \leq \max(1, |p| + |q|)$$
Indication : il suffit de montrer
$$|z| > 1 \Rightarrow |z| < |p| + |q|$$
3. (Ecp03) L'équation $z^4 + 6z^2 - iz + 3 - i = 0$ d'inconnue z admet-elle une solution réelle ?
L'équation
$$z^3 + (5+2i)z^2 + 7(1+i)z + 2(1+3i) = 0$$
d'inconnue z admet-elle une solution réelle ?
Trouver les racines dans $i\mathbb{R}$ de
$$z^4 + 6z^3 + 17z^2 + 24z + 52 = 0$$
4. (Ecp04) Soient a, b, c, d des réels tels que $ad - bc > 0$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$$
5. (Ecp05) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, calculer la forme trigonométrique de $(1 + \cos a + i \sin a)^n$.
6. (Ecp06) Déterminer les complexes z tels que z, $z - 1$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.
7. (Ecp07) Déterminer les complexes z tels que $z^2 = \overline{z}^6$.
8. (Ecp08) *Orthocentre*
Dans cet exercice, on pourra considérer
$$(d-a)(\overline{b}-\overline{c}) + (d-b)(\overline{c}-\overline{a}) + (d-c)(\overline{a}-\overline{b})$$
Montrer que, si deux des trois complexes
$$\frac{d-a}{b-c}, \frac{d-b}{c-a}, \frac{d-c}{a-b}$$
sont imaginaires purs, le troisième l'est aussi. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle se coupent.
9. (Ecp09) *Orthocentre et cercle circonscrit.* Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c distincts et de *module 1*.
   a. Montrer que le point H d'affixe $h = a + b + c$ est l'orthocentre du triangle A, B, C.
   b. Montrer que les six points d'affixes
   $$\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+h}{2}, \frac{b+h}{2}, \frac{c+h}{2}$$
   sont sur un cercle dont l'affixe du centre est $\frac{h}{2}$.
   c. Déterminer les affixes des symétriques de H par rapport à (BC), (CA), (AB). (exercice 40) Préciser les modules. Que peut-on en déduire ?
10. (Ecp10) Soit S et P la somme et le produit de deux nombres complexes non nuls. Montrer que ces deux nombres ont des arguments congrus modulo 2π si et seulement si
$$|S^2 - 4P| = |S|^2 - 4|P|$$
11. (Ecp11) Déterminer l'image par l'inversion $z \to \frac{1}{z}$ d'un cercle centré sur l'axe réel et qui passe par l'origine.
12. (Ecp12) Pour quels $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $1+i$, $z+i$, $1+iz$ alignés ?
13. (Ecp13) Déterminer des nombres complexes a, b, c, d tels que l'image par l'homographie
$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$
du cercle de centre 1 et de rayon 1 soit la droite formée par les points dont l'affixe est de partie réelle $\frac{1}{2}$.
On admettra qu'un des points du cercle n'a pas d'image par l'homographie. On ne cherchera pas à déterminer toutes les homographies satisfaisant cette condition.
14. (Ecp14) Caractérisation des triangles équilatéraux.
Dans cet exercice, on note $u = e^{i\frac{\pi}{3}}$. On désigne par a, b, c les affixes de trois points A, B, C deux à deux distincts.
   a. Exprimer u en fonction de j. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de -1. Former une équation dont les solutions sont u et $\overline{u}$.
   b. Simplifier
   $$\frac{c-a}{b-a}\,\frac{a-b}{c-b}\,\frac{b-c}{a-c}$$
   Interpréter géométriquement ce résultat.
   c. Montrer que le triangle (A, B, C) est équilatéral si et seulement si
   $$\frac{c-a}{b-a} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c} \in \{u, \overline{u}\}$$
   Quelle est l'interprétation géométrique de ces cas ?
   d. Montrer que
   $$\frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$
   En déduire que
   $$\frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c} \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c}$$
   e. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :
   – (A, B, C) est équilatéral
   – j ou j^2 est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z.
   – $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
   – $(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$.
15. (Ecp15) Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère les points d'affixes z, z^2, z^3 et le triangle qu'ils forment lorsqu'ils ne sont pas alignés. Préciser les z tels que
   a. Les points soient distincts et alignés.
   b. Le triangle est rectangle.
   c. Le point d'affixe 0 est l'orthocentre du triangle.
16. (Ecp16) Soit $a \in \mathbb{C}$ et m, m' les racines de l'équation
$$z^2 - 2az - 2 - 2i = 0$$
   a. Déterminer l'ensemble des a pour lesquels la droite (mm') est de pente 1.

b. Déterminer l'ensemble des a pour lesquels l'angle mOm' est droit.

17. (Ecp17) Déterminer les similitudes planes directes qui transforment 0 en 1 et $-i$ en λ (λ désignant un réel quelconque).
Déterminer l'ensemble décrit par le centre de ces similitudes lorsque λ décrit $\mathbb{R}$. (on pourra poser $\lambda = 1+\tan\theta$)

18. (Ecp18) Soit f la transformation de $\mathbb{C}$ dans lui même définie par $f(z) = z^2$. Déterminer l'image par f
   - d'une droite passant par 0,
   - d'une demi-droite d'origine 0,
   - d'un cercle de centre 0.

19. (Ecp19) Déterminer la condition que doit vérifier z pour que
   - les points d'affixes 1, z, z^3 soient alignés,
   - les points d'affixes 1, z, z^{-1}, $1-z$ soient cocycliques.

20. (Ecp20) Cercles définis par un diamètre.
   a. Soit Z et u dans $\mathbb{C}$. Montrer (par un calcul) que
$$\frac{Z-u}{Z+u} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |Z| = |u|$$
   b. Soit A et B deux points d'affixe a et b. Montrer qu'un point d'affixe z est sur le cercle de diamètre AB si et seulement si
$$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$$
   Quelle est l'interprétation géométrique ?
   c. Déterminer les images du cercle de diamètre les points d'affixe -1 et 1 par les homographies
$$z \to \frac{z+4}{z-1}, \qquad z \to \frac{z-1}{z-5}$$

21. (Ecp21) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est définie par :
$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$$
Montrer que f est à valeurs réelles si et seulement si λ est réel ou imaginaire pur.

22. (Ecp22) Résoudre les équations d'inconnue z
$$z^2 + (3+2i)z + 1 + 3i = 0 \quad (1)$$
$$z^2 + 5iz - 4 = 0 \quad (2)$$
$$z^2 - 3z + 1 - 3i = 0 \quad (3)$$
$$(z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0 \quad (4)$$
$$5z^2 + (1+i)z + \frac{1}{4}(3+2i) = 0 \quad (5)$$

23. (Ecp23) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\theta \in [0, \pi]$, résoudre
$$z^4 - 2\lambda^2 z^2 (1+\cos\theta)\cos\theta + \lambda^4(1+\cos\theta)^2 = 0$$

24. (Ecp24) Soit $u \in]-\pi, \pi[$, résoudre
$$z^2 - 2e^{iu}z + 2ie^{iu}\sin u = 0$$
Suivant les valeurs de u, préciser le module et un argument de chaque solution.

25. (Ecp25) *Théorème de la médiane.*
Soit z et z' deux nombres complexes, montrer que
$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$
Soit u une racine carrée de zz', montrer que
$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$$
Utiliser les propriétés des racines carrées.

26. (Ecp26) Soient z et z' deux nombres complexes de module 1. On suppose $zz' + 1 \neq 0$ montrer que

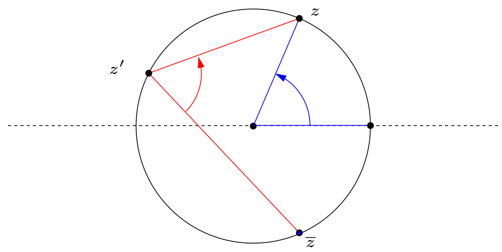

FIG. 1 – Exercice 26

$$\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$$
En déduire l'égalité modulo π des angles indiqués sur la figure 1

27. (Ecp27) Préciser le module et l'argument de
$$\frac{1+\cos a + i\sin a}{\sqrt{1+\sin(2a)} + i\sqrt{1-\sin(2a)}} \text{ pour } a \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$$
en utilisant $\frac{\pi}{2} - 2a$.

28. (Ecp28) On considère trois points d'affixes z, i, iz et le triangle qu'ils forment lorsqu'ils ne sont pas alignés.
   a. Condition pour qu'ils soient alignés ?
   b. Condition pour que le triangle soit rectangle isocèle en i.
   c. Condition pour que le triangle soit équilatéral.

29. (Ecp29) Dans l'ensemble des racines cubiques de $\frac{-1+i}{8}$, une seule a une puissance quatrième réelle. Laquelle ?

30. (Ecp30) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z
$$(1) \quad z^4 + 6z^2 + 25 = 0$$
$$(2) \quad z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$$
$$(3) \quad \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$$

31. (Ecp31) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue z :
$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$

32. (Ecp32) Isobarycentre, cercle circonscrit et triangle équilatéral.
Montrer que trois points non alignés forment un triangle équilatéral si et seulement si leur isobarycentre est égal au centre de leur cercle circonscrit.

33. (Ecp33) Équation de droite.
Soit a, b, c des réels fixés avec $(a,b) \neq (0,0)$. Pour tout $z \in C$, on note $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. Déterminer des complexes w et u tels que
$$ax + by + c = \operatorname{Re}\left((z-u)\overline{w}\right).$$

34. (Ecp34) Déterminer les nombres complexes z tels que z et $-(z+1)$ aient les mêmes arguments.
Déterminer les nombres complexes z de module 1 et tel que la somme d'un argument de z et d'un argument de $z+1$ soit congrue à 0 modulo 2π.

35. (Ecp35) Soit z_1, z_2, z_3 les trois racines cubiques d'un nombre complexe A. La relation
$$z_1 - z_2 = \frac{1}{z_3}$$
est-elle possible ? Préciser la manière dont elle se réalise.

36. (Ecp36) Soit a, b, c trois nombres complexes, montrer que
$$(aj^2+bj+c)(aj+bj^2+c) = \frac{1}{2}\left((b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\right)$$
Que permet ce calcul relativement à la dernière question de l'exercice 14 ?

37. (Ecp37) On considère quatre nombres réels
$$\alpha < \theta' < \beta < \theta \qquad \text{avec} \qquad \theta - \alpha < 2\pi$$
et les nombres complexes
$$a = e^{i\alpha}, \quad b = e^{i\beta}, \quad m = e^{i\theta}, \quad m' = e^{i\theta'}$$
Comparer les arguments de $\frac{b-m}{a-m}$ et de $\frac{b-m'}{a-m'}$.
Interpréter géométriquement et généraliser à un cercle quelconque.

38. (Ecp38) On considère l'homographie
$$h : z \mapsto \frac{z+2i}{1-iz}$$
a. Déterminer le points fixes de h c'est à dire les solutions de $h(z) = z$. On les note p et q.
b. Le birapport de 4 nombres complexes est défini par :
$$B(a,b,c,d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$
Calculer $B(p,q,h(z),z)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{p,q\}$.

39. (Ecp39) Soit z_1, z_2, z_3 dans $\mathbb{U}$ tels que $z_1+z_2+z_3 = 0$. Montrer que le triangle qu'ils forment est équilatéral.

40. (Ecp40) Soit a, b, c trois nombres complexes distincts de module 1.
Soit u et v complexes, on considère l'application s de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ défnie par
$$z \mapsto u\overline{z} + v$$
a. Déterminer u et v pour que $s(b) = b$ et $s(c) = c$. On dit que b et c sont des points fixes de s.
b. Calculer alors $s \circ s$ et montrer que si m est l'affixe d'un point de la droite (BC) (points B et C d'affixes b et c) alors $s(m) = m$.
On admettra que s est l'expression complexe de la symétrie par rapport à la droite (BC).

41. (Ecp41) Soit z et w des nombres complexes tels que $\operatorname{Im}(z) > 0$ et $\operatorname{Im}(w) > 0$ et $\operatorname{Re}(z) \neq \operatorname{Re}(w)$.
Montrer qu'il existe un unique cercle de centre un point d'affixe $u \in \mathbb{R}$ et passant par les points d'affixes z et w. Faire un dessin et préciser u ainsi que les affixes des points d'intersection du cercle avec la droite réelle.

42. (Ecp42) Quel est l'ensemble des points d'affixe z tels que $z^3 \in]-\infty, 8]$?

43. (Ecp43) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue z :
$$z^2 + 3|z| - 4 = 0$$

44. (Ecp44)
a. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, montrer que
$$\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1.$$
Quelle est l'image du demi-plan $\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$ par la transformation $z \mapsto \frac{z}{1-z}$?
b. Soit z_1 et z_2 complexes non nuls, montrer
$$|z_1+z_2| = |z_1-z_2| \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}.$$
c. Soit u et v dans $\mathbb{C}$, montrer
$$|u+iv|^2 = u^2+v^2 \Leftrightarrow (u+iv = 0 \text{ ou } (u \text{ et } v \text{ réels})).$$

45. (Ecp45) Montrer que
$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|+|b| \leq |a-b|+|a+b|$$
Caractériser le cas d'égalité.

46. (Ecp46) Soit $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes non nuls de même module. On note
$$z = \sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{z_k}{z_l}.$$
Montrer que $z \in \left[0, n^2\right]$ et préciser dans quel cas $z = 0$ ou $z = n^2$.

47. (Ecp47) Symétrie par rapport à une droite passant par l'origine.
Soit $u \in C$ non nul, U le point d'affixe u, O le point d'affixe 0. Pour tout point M d'affixe z, on note M' le symétrique de M par rapport à la droite (OU) et z' son affixe.
En écrivant que le point d'affixe $z+z'$ appartient à (OU) et que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (OU), déterminer z' en fonction de z et u.

48. (Ecp48) Soit f une fonction de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$ telle que
$$\forall (u,v) \in \mathbb{U}_n^2,\ f(uv) = f(u)f(v).$$
Montrer qu'il existe un unique $s \in [\![1, n-1]\!]$ tel que
$$\forall u \in \mathbb{U}_n,\ f(u) = u^s.$$

1. (Ccp01) Les formules suivantes sont souvent utiles :
$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$$
car elles permettent de factoriser une somme ou une différence d'exponentielles.
On peut mettre en facteur l'exponentielle de la somme et obtenir un sin ou un cos.
$$a+b = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(2\cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$a-b = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(2i\sin(\alpha-\beta)\right)$$
De même avec 0 comme argument de l'exponentielle :
$$0 = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2}$$
$$\gamma = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}$$
ce qui donne
$$1 - e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(-2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
On en déduit :
$$\frac{a+b}{a-b} = -i\,\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$
$$\frac{a+b}{1-ab} = i\,\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

2. (Ccp02) Utilisons l'indication en supposant démontrée l'implication suggérée.
$$|z| > 1 \Rightarrow |z| < |p| + |q|$$
On en déduit
$$|z| > 1 \Rightarrow 1 < |z| < |p| + |q|$$
$$\Rightarrow \max(1, |p| + |q|) = |p| + |q|$$
Dans ce cas on a bien $|z| < \max(1, |p| + |q|)$.
Dans l'autre cas, $|z| \leq 1$. On a encore
$$|z| \leq \max(1, |p| + |q|)$$
Ce qui prouve l'inégalité générale demandée.
Il reste à montrer l'inégalité indiquée. Lorsque $z \neq 0$, on peut diviser par z la relation qu'il vérifie :
$$|z| > 1 \Rightarrow z^2 = -p + \frac{q}{z} \Rightarrow |z|^2 \leq |p| + |q|$$
en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que $|z| > 1$.
On termine par :
$$|z| > 1 \Rightarrow |z| < |z|^2 \leq |p| + |q|$$

3. (Ccp03) Ce qu'il est important de retenir dans cet exercice *c'est que l'on a plus de prise sur un système de plusieurs équations polynomiales que sur une seule.* On peut transformer un système en un système équivalent avec une des deux équations de degré strictement plus petit.
Si, pour z réel, l'expression $z^4 + 6z^2 - iz + 3 - i$ est nulle alors les parties réelles et imaginaires de cette expression sont nulles.
$$\begin{cases} z^4 + 6z^2 + 3 = 0 \\ -z - 1 = 0 \end{cases}$$
La seule racine possible est donc -1 or -1 n'est pas une racine. L'équation n'admet donc pas de solution réelle.
De même, si z est une solution réelle de la deuxième équation,
$$\begin{cases} z^3 + 5z^2 + 7z + 2 = 0 \\ 2z^2 + 7z + 6 = 0 \end{cases}$$
Pour pouvoir tirer parti de cette méthode dans un cas plus compliqué, il ne FAUT PAS résoudre la deuxième équation mais l'utiliser pour faire baisser le degré.
$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) - \frac{z}{2} \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}z^2 + 4z + 2 = 0 \\ 2z^2 + 7z + 6 = 0 \end{cases}$$
De même en remplaçant (1) par $(1) - \frac{3}{4}(2)$, on obtient
$$\begin{cases} -\frac{5}{4}z - \frac{5}{2} = 0 \\ 2z^2 + 7z + 6 = 0 \end{cases}$$
Cette fois la seule racine possible -2 est racine des deux équations et l'équation admet bien une racine réelle -2.
Pour la troisième équation, en formant les deux équations vérifiées par t réel tel que it soit racine, on trouve que les racines imaginaires pures sont $-2i$ et $2i$.

4. (Ccp04) On introduit le conjugué du dénominateur :
$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{|cz+d)|^2}(az+b)(c\overline{z}+d)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im}(w) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d)|^2}$$
Ce qui entraîne le résultat souhaité.

5. (Ccp05) Appliquons la même factorisation que dans l'exercice 1.
$$(1 + \cos a + i\sin a)^n = (1 + e^{ia})^n = (2\cos\frac{a}{2})^n e^{i\frac{na}{2}}$$

6. (Ccp06) Lorsque $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| = \frac{1}{|z|}$ si et seulement si $|z| = 1$. Géométriquement, le point d'affixe z est sur le cercle unité.
De plus, $|z| = |z-1|$ si et seulement si le point d'affixe z est à égale distance de l'origine et du point d'affixe 1. Les points cherchés sont donc sur l'intersection du cercle et de la médiatrice. Les nombres complexes cherchés sont donc
$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
Voir la figure 2.

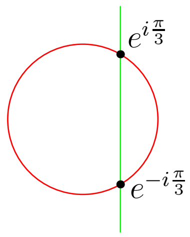

FIG. 2 – Exercice 6

7. (Ccp07) Il est évident que 0 est solution. On cherche les solutions non nulles sous forme trogonométrique. L'équation devient :

$$\rho^2\, e^{2i\theta} = \rho^6\, e^{-6i\theta} \Leftrightarrow \rho^4 = e^{8i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0 \mod \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

8. (Ccp08) Notons A, B, C, D les points respectivement d'affixe a, b, c, d et T l'expression proposée par l'énoncé. Comme on ne sait pas trop quoi faire, on développe. Sur les 12 termes, la moitié se simplifie ce qui montre que T est imaginaire pur.

$$\begin{aligned} T &= -a\overline{b} + \overline{a}b + a\overline{c} - \overline{c}a - b\overline{c} + b\overline{c} \\ &= 2i\,\mathrm{Im}\,(\overline{a}b + a\overline{c} + b\overline{c}) \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si une somme de 3 nombres complexes est imaginaire pure, lorsque 2 sont imaginaires purs, le 3ième l'est automatiquement. Chaque quotient correspond à une terme de T. Par exemple

$$\left(\frac{d-a}{b-c} = \frac{1}{|b-c|^2}(d-a)(\overline{b}-\overline{c})\right) \Rightarrow \left(\frac{d-a}{b-c} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (d-a)(\overline{b}-\overline{c})\right).$$

On en déduit que les 3 hauteurs se coupent car le caractère imaginaire pur d'un quotient correspond à l'appartenance à une hauteur. Par exemple : $\frac{d-a}{b-c} \in i\mathbb{R}$ si et seulement si D est sur la hauteur du triangle ABC issue de A.
On a montré que si un point se trouve sur deux hauteurs de ABC, il se trouve obligatoirement sur le troisième.

9. (Ccp09)

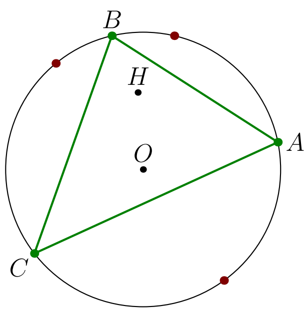

FIG. 3 – Exercice 9

a. Pour montrer que H est sur la hauteur issue de A, il suffit de vérifier que

$$\frac{h-a}{b-c} \in i\mathbb{R}$$

Comme b et c sont de module 1 leur inverse est égal à leur conjugué donc

$$\begin{aligned} \frac{h-a}{b-c} = \frac{b+c}{b-c} &= \frac{1}{|b-c|^2}(b+c)(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}) \\ &= \frac{1}{|b-c|^2}(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}) = \frac{1}{|b-c|^2}(c\overline{b}-b\overline{c}) \\ &= 2i\frac{\mathrm{Im}(c\overline{b})}{|b-c|^2} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Les autres orthogonalités se traitent dela même manière. On remarque la permutation circulaire des lettres a, b, c.

b. Exprimons les 6 différences avec $\frac{h}{2}$. Elles sont respectivement égales à :

$$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$$

donc de même module $\frac{1}{2}$. Les 6 points sont sur le cercle de centre de point d'affixe $\frac{h}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

c. Calculons l'affixe du symétrique de H par rapport à la droite (BC) avec l'expression de la symétrie trouvée dans l'exercice 40.

$$\begin{aligned} s_{(BC)}(h) &= -bc(\overline{a+b+c} + b + c \\ &= -\frac{bc}{a} - c - b + b + c = -\frac{bc}{a} \end{aligned}$$

Par permutation circulaire, on trouve des quatients analogues pour les autres symétriques. Ils sont tous de module 1. Ces 3 symétriques sont sur le cercle unité contenant les points A, B, C.

10. (Ccp10) Soit a et b complexes non nuls avec des arguments α et β tels que

$$S = a + b,\ P = ab,\ a = |a|e^{i\alpha},\ b = |b|e^{i\beta}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} |S^2 - 4P| = |a-b|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - 2\,\mathrm{Re}(a\overline{b}) \\ &= |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

De même

$$|S|^2 - 4|P| = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\alpha-\beta) - 4|a||b|.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |S^2 - 4P| = |S|^2 - 4|P| &\Leftrightarrow 1 = \cos(\alpha-\beta) \\ &\Leftrightarrow e^{i(\alpha-\beta} = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

11. (Ccp11) Notons $\mathcal{I}$ l'application inversion définie de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$, $\mathcal{C}_a$ le cercle de centre le point d'affixe a réel passant par l'origine et $\mathcal{T}$ l'image de ce cercle par l'inversion.

L'application $\mathcal{I}$ est une *involution*, c'est à dire que $\mathcal{I}\circ\mathcal{I} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$. On en déduit que

$$z \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{I}(z) \in \mathcal{C}_a \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z} - a\right| = |a|$$
$$\Leftrightarrow |1 - az|^2 = |az|^2 \Leftrightarrow 1 - a\,\mathrm{Re}(z) = 0$$

L'image cherchée est donc formée par les complexes dont la partie réelle est $\frac{1}{a}$.

12. (Ccp12) En considérant les trois équations, on montre que les points sont distincts si et seulement si $z \neq 1$. Dans ces conditions, les points ne sont jamais alignés car

$$\frac{z + i - (1+i)}{1 + iz - (1+i)} = \frac{z-1}{iz-i} = -i \notin \mathbb{R}$$

13. (Ccp13) L'énoncé n'est pas très précis, un des points du cercle ne peut pas avoir d'image mais on ne sait pas lequel. Cela se traduit par : le point d'affixe $-\frac{d}{c}$ est sur le cercle.
On va supposer que c'est l'origine. On en tire $d = 0$. Comme on peut multiplier a, b, c, d par un même nombre complexe non nul sans changer l'homographie, on peut supposer que $c = 1$.
On cherche donc des conditions sur a et b pour que

$$z \mapsto a + \frac{b}{z}$$

réponde à la question.
Considérons les images des points d'affixe 2 et1 $+ i$ (ils sont bien sur le cercle). Alors :

$$\mathrm{Re}(a + \frac{b}{2}) = \frac{1}{2},$$
$$\mathrm{Re}(a + \frac{b}{1+i}) = \mathrm{Re}(a + \frac{1}{2}b(1-i))$$
$$= \mathrm{Re}(a + \frac{b}{2}) - \mathrm{Re}\,\frac{bi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b \in \mathbb{R}$$

Montrons maintenant que

$$h : z \mapsto \frac{1}{z}$$

est une homographie qui satisfait à la condition.
Pour tout point M (d'affixe m) du cercle, il existe un réel t tel que

$$m = 1 + e^{it}$$

alors :

$$h(m) = \frac{1}{1+e^{it}} = \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}}e^{-i\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sin\frac{t}{2}}{2\cos\frac{t}{2}}$$

qui sont bien les affixes des points de la droite voulue.

14. (Ccp14) Un point clé de cet exercice est l'intervention d'expressions *invariantes par permutation circulaire* des lettres a, b, c.
 a. Comme u est une racine carrée de $j = j^4$, on doit avoir $u = j^2$ ou $-j^2$. À cause du signe des parties réelles et imaginaires, $u = -j^2$.
 Comme -1 est une racine cubique évidente de -1, d'après le cours, les racines cubiques de -1 sont -1, $-j = \overline{u}$ et $-j^2 = u$. L'équation du second degré (inconnue z) dont les racines sont u et $\overline{u}$ est
 $$z^2 - z + 1 = 0$$
 b. L'expression est égale à -1 car les numérateurs et dénominateurs se simplifient au signe près. Cette relation traduit que la somme des angles du triangle est congrue à π modulo 2π.
 c. Lorsque le triangle est équilatéral direct, chacun des trois quotients est égal à u. Le fait que les modules des quotients soient 1 traduit l'égalité des longueurs des côtés. La valeur u traduit en plus que les trois angles sont $\frac{\pi}{3}$. Pour un triangle équilatéral indirect, la valeur commune est $\overline{u}$.
 d. L'équivalence s'obtient simplement en développant
 $$(a-b)(a-c) = -(b-c)^2$$
 Comme l'expression obtenue est invariante par permutation circulaire des lettres a, b, c :
 $$\frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c} \Rightarrow \frac{b-c}{a-c} = \frac{c-a}{b-a}$$
 ce qui entraine l'égalité des trois quotients.
 e. En développant, on montre que
 $$\frac{c-a}{b-a} = u = -j^2 \Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$$
 Cette expression possède encore une propriété d'invariance par permutation circulaire. En multipliant par j et j^2, on montre que
 $$a+jb+j^2c = 0 \Leftrightarrow b+jc+j^2a = 0 \Leftrightarrow c+ja+j^2b = 0$$
 La situation est analogue dans le cas indirect. On en tire l'équivalence entre les deux premières propriétés.
 L'égalité de la troisième condition traduit une égalité entre quotients. Mais d'après d., elle traduit l'égalité des *trois* quotients entre eux. La valeur commune de ces quotients est alors une racine cubique de -1 d'après b. On a donc l'équivalence entre les propriétés 1 et 3.
 La propriété 4 est une simple reformulation de la propriété 3.

15. (Ccp15)
 a. Pour étudier si les points sont distincts, on considère les équations $z = z^2$, $z = z^3$ et $z^2 = z^3$. On en déduit que si z est 0 ou 1, les trois points sont confondus. Si $z = -1$ deux points sont confondus. Pour les autres valeurs, les points sont distincts.
 On suppose donc $z \neq 0$ et $z \neq \pm 1$. Les points d'affixes z, z^2, z^3 sont alors alignés si et seulement si
 $$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -1$$
 b. On suppose $z \neq 0, \neq 1, \neq -1$. Trois cas sont possibles pour le triangle z, z^2, z^3.

– Rectangle en z.

$$\frac{z^2-z}{z^3-z}=\frac{1}{z+1}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+1\in i\mathbb{R}$$

Le point d'affixe z est sur la droite parallèle à (Oy) d'abscisse -1.

– Rectangle en z^2.

$$\frac{z-z^2}{z^3-z^2}=-\frac{1}{z}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$$

Le point d'affixe z est sur la droite (Oy).

– Rectangle en z^3.

$$\frac{z-z^3}{z^2-z^3}=\frac{1+z}{z}\in i\mathbb{R}$$

Notons O l'origine, A le point d'affixe -1 et Z le point d'affixe z. La condition traduit que l'angle $\widehat{OZA}$ est droit c'est à dire que Z est sur le cercle de diamètre OA (voir exercice 20).

c. Notons $x=\operatorname{Re}(z)$ et $y=\operatorname{Im}(z)$. Deux orthogonalités suffisent :

$$\frac{z^3-z^2}{z-0}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2-z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-y^2-x=0$$

$$\frac{z^3-z}{z^2-0}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z-\frac{1}{z}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow x-\frac{x}{x^2+y^2}=0$$

Comme $x=0$ est incompatible avec la première équation, on doit avoir $x^2+y^2=1$. En remplaçant dans la première équation, on obtient

$$2x^2-x-1=0\Rightarrow x=1 \text{ ou } -\frac{1}{2}$$

Comme 1 est exclu les bons z sont j et j^2.

16. (Ccp16) Soit δ une racine carrée du discriminant et notons $m'=a+\frac{\delta}{2}$, $m=a-\frac{\delta}{2}$ les deux racines.

a. La pente de la droite (mm') est $\frac{\operatorname{Im}\delta}{\operatorname{Re}\delta}$ qui est bien indépendante du choix de la racine carrée. De plus,

$$\frac{\operatorname{Im}\delta}{\operatorname{Re}\delta}=1\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{Re}(\delta^2)=0\\ \operatorname{Im}(\delta)\operatorname{Re}(\delta)>0\Leftrightarrow\operatorname{Im}(\delta^2)>0\end{cases}$$

Or δ^2 est le discriminant $4a^2+8(1+i)$. En notant $x=\operatorname{Re}(a)$ et $y=\operatorname{Im}(a)$, les conditions sont

$$x^2-y^2+2=0 \qquad xy+1>0$$

b. L'angle mOm' est droit si et seulement si

$$\begin{aligned}\frac{m'}{m}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow (a-\frac{\delta}{2})(\overline{a}-\frac{\overline{\delta}}{2})\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow 4|a|^2=|\delta|^2\\ \Leftrightarrow 4|a|^2=|4a^2+8(1+i)|\\ \Leftrightarrow 0=\operatorname{Re}(a^2(1-i))+|1+i|^2\\ \Leftrightarrow x^2-y^2+2xy+2=0\end{aligned}$$

17. (Ccp17) Les similitudes planes directes sont les fonctions complexes de la forme $z\mapsto az+b$ où a et b sont des complexes fixés. Les conditions se traduisent par un système

$$\begin{cases}b=1\\ -ai+b=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=i(\lambda-1)\end{cases}$$

Soit c l'affixe du centre d'une telle similitude, elle vérifie (en posant $\lambda=1+\tan\theta$)

$$\begin{aligned}i(\lambda-1)c+1=c\Leftrightarrow c&=\frac{1}{1-i\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\\ &=\cos\theta e^{i\theta}=\cos^2\theta+i\cos\theta\sin\theta\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{i}{2}\sin(2\theta)=\frac{1}{2}(1+e^{2i\theta})\end{aligned}$$

L'ensemble des centres est donc le cercle de centre le point d'affixe -1 et de rayon $\frac{1}{2}$.

18. Ccp18 Image par f : fonction « carré ».

– Une droite passant par O est de la forme

$$\mathcal{D}_w=\{\lambda w,\lambda\in\mathbb{R}\}$$

avec $w\in\mathbb{C}^*$ fixé. Alors $f(\mathcal{D}_w)$ est la demin droite d'origine O et passant par le point d'affixe w^2.

– L'image d'une demi-droite d'origine O et passant par le point d'affixe $w\in\mathbb{C}^*$ est la demi-droite d'origine O et passant par le point d'affixe w^2.

– L'image du cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre O et de rayon R^2.

19. (Ccp19) Notons x la partie réelle et y la partie imaginaire de z.

Alignement de 1, z, z^3.

Les points sont deux à deux distincts si z n'est pas dans $\{1,j,j^2,0,-1\}$. Ils sont alors alignés si et seulement si

$$\frac{z^3-z}{z-1}=z(z+1)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2xy+y=0$$

Les points cherchés sont sur les droites d'équations $y=0$ et $x=\frac{1}{2}$.

Cocyclicité de 1, z, z^{-1}, $1-z$.

D'après le cours la condition s'écrit :

$$\frac{(z^{-1}-z)(1-z-1)}{(z^{-1}-1)(1-z-z)}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{(z+1)z}{1-2z}\in\mathbb{R}$$

20. (Ccp20) Cercles définis par un diamètre.

a. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{Z-u}{Z+u}=\frac{(Z-u)\overline{(Z+u)}}{|Z+u|^2}\in i\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow |Z|^2\underbrace{-u\overline{Z}+\overline{u}Z}_{\in i\mathbb{R}}-|u|^2\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow |Z|^2-|u|^2=0\end{aligned}$$

b. En écrivant

$$\begin{aligned}a&=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\\ b&=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

on se ramène à la question précédente avec

$$Z = z - \frac{a+b}{2}, \qquad u = \frac{a-b}{2}$$

On en déduit la caractérisation demandée. Si M est le point d'affixe z, il est sur le cercle de diamètre AB si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

c. – Homographie : $z \to \frac{z+4}{z-1}$.
Le point d'affixe 1 n'est pas dans l'espace de départ, on cherche donc l'image $\mathcal{I}$ du cercle privé de ce point. L'homographie est bijective avec

$$Z = \frac{z+4}{z-1} \Leftrightarrow z = \frac{4+Z}{Z-1}$$

D'après les questions précédentes,

$$Z \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \frac{\frac{4+Z}{Z-1}+1}{\frac{4+Z}{Z-1}-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 3+2Z \in i\mathbb{R}$$

L'image cherchée est donc la droite d'équation $3+2x=0$.

– Homographie : $z \to \frac{z-1}{z-5}$.
Cette fois, tous les complexes ont une image avec

$$Z = \frac{z-1}{z-5} \Leftrightarrow z = \frac{5Z-1}{Z-1}$$

et

$$Z \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \frac{\frac{5Z-1}{Z-1}+1}{\frac{5Z-1}{Z-1}-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{Z-\frac{1}{3}}{Z} \in i\mathbb{R}$$

L'image cherchée est le cercle de diamètre les points d'affixes $\frac{1}{3}$ et 0.

21. (Ccp21) Si λ est réel, f est à valeurs réelles car les $e^{\pm\lambda x}$ sont réels. Si λ est imaginaire pur (par exemple $\lambda = it$) par définition de cos,

$$f(x) = \cos(tx) \in \mathbb{R}.$$

On va montrer que

$$(f \text{ à valeurs réelles et } \lambda \notin \mathbb{R}) \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}.$$

Notons $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \overline{f(x)} \\ \Rightarrow e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} = e^{\overline{\lambda}x} + e^{-\overline{\lambda}x} \\ \Rightarrow e^{xa} 2i\sin(xb) = e^{-xa} 2i\sin(xb). \end{aligned}$$

On sait que $b \neq 0$ car $\lambda \notin \mathbb{R}$. On considère $x = \frac{\pi}{2b}$ de sorte que les sin valent 1. On en déduit

$$e^{xa} = e^{-xa} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}.$$

22. (Ccp22) Résolution des équations.
Équation (1) : $\Delta = 1$, solutions : $-2-i$, $-1-i$.
Équation (2) : $\Delta = -9$, solutions : $-4i$, $-i$.
Équation (3) : $\Delta = 5+12i = (3+2i)^2$, solutions :

$$3+i, -i$$

Équation (4) : la factorisation obtenue en écrivant $1 = -(i)^2$ montre que l'ensemble des solutions est l'union des ensembles de solutions des équations

$$\begin{aligned} &(a) \qquad z^2+z+1-i=0 \\ &(b) \qquad z^2+z+1+i=0 \end{aligned}$$

Pour l'équation (a), $\Delta = -3+4i = (1+2i)^2$. Les solutions sont i et $-1-i$.
Les solutions de (b) sont les conjuguées de celles de (a) : $-i$ et $-1+i$.
Équation (5) : discriminant $-15-8i = (1-4i)^2$, solutions

$$-\frac{i}{2}, \ \frac{-2+3i}{10}.$$

23. (Ccp23)

$$\pm\lambda\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}} \qquad \pm\lambda\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

24. (Ccp24) Calcul du discriminant

$$4e^{2iu} - 8ie^{iu}\sin u = 4e^{iu}\left(e^{iu} - 2i\sin u\right) = 4e^{iu}e^{-iu} = 4$$

On en déduit les racines :

$$e^{iu}+1 = 2\cos\frac{u}{2}\,e^{i\frac{u}{2}}, \qquad e^{iu}-1 = 2i\sin\frac{u}{2}\,e^{i\frac{u}{2}}$$

Pour la première racine, suivant le signe de $\cos\frac{u}{2}$, un argument est $\frac{u}{2}$ (cas positif) ou $\frac{u}{2}+\pi$ (cas négatif).
Pour la seconde, suivant le signe de $\sin\frac{u}{2}$, un argument est $\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2}$ (cas positif) ou $\frac{u}{2}-\frac{\pi}{2}$ (cas négatif).

25. (Ccp25) La première formule se déduit de l'expression du carré du module d'une somme.
Introduisons des racines carrées w et w' de z et z' :

$$u^2 = zz', \ w^2 = z, \ w'^2 = z'.$$

Alors ww' est une racine carrée de zz' comme u donc

$$u \in \{ww', -ww'\}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right| \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|w^2+w'^2+2ww'\right| + \left|\left|w^2+w'^2-2ww'\right|\right|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|w+w'\right|^2 + \left|\left|w-w'\right|^2\right|\right) \\ &= |w|^2+|w'|^2 = |z|+|z'|. \end{aligned}$$

26. pas de correction pour Ecp26.tex

27. (Ccp27) On écrit le numérateur à l'aide d'une exponentielle. Pour le dénominateur, on utilise d'abord

$$\sin(2a) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2a\right) = \cos 2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} 1+\sin(2a) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right) \\ 1-\sin(2a) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right) \end{aligned}$$

La condition sur a entraine que
$$0 < \frac{\pi}{4} - a < \frac{\pi}{2}$$
On peut donc supprimer les racines carrées et l'expression exponentielle demandée est :
$$\sqrt{2}\cos(a)e^{-i\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

28. (Ccp28)
   a. Le point d'affixe z est sur le cercle de diamètre $1, i$. En effet (voir exercice 20)
$$\frac{z-i}{iz-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-1} \in i\mathbb{R}$$
   b. Le caractère isocèle et rectangle en i se traduit par :
$$z - i = \pm i(iz-i) \Leftrightarrow z - i = \pm(z-1)$$
$$\Leftrightarrow z - i = -(z-1) \Leftrightarrow z = \frac{1+i}{2}$$
   c. Notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. Écrivons le caractère équilatéral par une égalité de distance
$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-i}{iz-i}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z-i}{iz-z}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z-i}{z-1}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z-i}{\sqrt{2}z}\right| = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 1 - 2y = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}(1+i)$$

29. (Ccp29) On déduit de l'écriture exponentielle
$$\frac{-1+i}{8} = \frac{1}{8}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$
que les trois racines cubiques sont
$$\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}, \qquad \frac{j}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}, \qquad \frac{j^2}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$
La seule dont la puissance quatrième est réelle est la première.

30. (Ccp30) Nommons les équations d'inconnue z qui interviennent dans la première équation.
$$(1) \qquad z^4 + 6z^2 + 25 = 0$$
$$(2) \qquad z^2 + 6z + 25 = 0$$
Pour tout nombre complexe w, il est clair que w est solution de (1) si et seulement si w^2 est solution de (1). On se ramène donc aux techniques de cours : résolution d'une équation du second degré puis recherche de racines carrées. On trouve que les quatre racines sont :
$$1+2i, \qquad -1-2i, \qquad 1-2i, \qquad -1+2i$$
Calcul analogue pour la deuxième équation. On résoud une équation du second degré puis on extrait les racines carrées des solutions. On trouve
$$1-i, \qquad 3-2i, \qquad -1+i, \qquad -3+2i$$
Calcul analogue pour la troisième. Les solutions de $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sont les racines quatrièmes de l'unité autres que 1 soit -1, i et $-i$. On doit donc résoudre
$$\frac{z+i}{z-i} = -1 \qquad (= i) \qquad (= -i)$$
On trouve 0, 1, -1.

31. (Ccp31) Un complexe u est solution si et seulement si $u-1$ est une racine cubique de j ou de j^2. Les solutions de l'équations sont donc :
$$1+e^{i\frac{2\pi}{9}}, 1+e^{i\frac{8\pi}{9}}, 1+e^{i\frac{14\pi}{9}}, 1+e^{i\frac{4\pi}{9}}, 1+e^{i\frac{10\pi}{9}}, 1+e^{i\frac{16\pi}{9}}.$$

32. (Ccp32) Il est évident que si le triangle est équilatéral, le centre du cercle circonscrit coïncide avec l'isobarycentre. Réciproquement, à une similitude près, on peut supposer que les trois points sont sur le cercle unité et que l'affixe de l'un d'entre eux est égal à 1.
On considère donc trois points d'affixes
$$z_1 = e^{i\alpha_1}, \; z_2 = e^{i\alpha_2}, \; z_3 = 1$$
et vérifiant
$$e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2} + 1 = 0$$
On en déduit
$$e^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} 2\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right) + 1 = 0$$
Donc
$$e^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \equiv 0 \mod \pi$$
$$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \mod 2\pi \Rightarrow z_2 = \overline{z_1}$$
On en tire facilement avec la relation et la valeur de j que
$$\left(z_1 = j, z_2 = j^2\right) \text{ ou } \left(z_1 = j^2, z_2 = j\right)$$
ce qui montre que le triangle est équilatéral.

33. (Ccp33) Avec les notations de l'énoncé,
$$ax + by = a\,\mathrm{Re}\,z + b\,\mathrm{Im}\,z.$$
Cela fait penser à
$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Re}\,z' - \mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,z'$$
ou plutôt à
$$\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Re}\,z' + \mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,z'.$$
Considérons $a + ib$ et nommons le w. Alors
$$ax + by + c = \mathrm{Re}(z\overline{w} + c).$$
Considérons $-\frac{c}{\overline{w}}$ et nommons le u : alors $c = -\overline{w}u$ et
$$ax + by + c = \mathrm{Re}\left(z\overline{w} - u\overline{w}\right) = \mathrm{Re}\left((z-u)\overline{w}\right).$$

34. (Ccp34) Supposons que les nombres complexes z et $-(z+1)$ aient les mêmes arguments. Il existe alors α tel que
$$z = |z|e^{i\alpha} \qquad z+1 = -|z+1|e^{i\alpha}$$
On en tire
$$z+1 = -\frac{|z+1|}{|z|}z \Rightarrow \left(1+\frac{|z+1|}{|z|}\right)z = -1$$
ce qui entraine que z est un réel négatif. Mais il faut aussi que $-(z+1)$ soit strictement négatif. Finalement, l'ensemble cherché est $]-1,0[$.
Pour la deuxième question.
$$z = e^{i\alpha}, \qquad z+1 = |z+1|e^{-i\alpha}$$
Or $z+1 = 2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ donc
$$e^{i\frac{3\alpha}{2}} = \frac{|\cos\frac{\alpha}{2}|}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$
On en tire $\frac{3\alpha}{2} \equiv 0 \mod \pi$ puis $\alpha \equiv 0 \mod \frac{2\pi}{3}$ donc $z \in \left\{1, j, j^2\right\}$. Mais pour j et j^2, la somme des arguments est π donc 1 est la seule solution.

35. (Ccp35) Faisons jouer un rôle particulier à la racine cubique z_1 de A. D'après le cours, les deux autres s'obtiennent en multipliant z_1 par les éléments de $\mathbb{U}_3$ (racines cubiques de l'unité). On a donc deux possibilités :
– Cas 1. $z_2 = jz_1$ et $z_3 = j^2z_1$.
– Cas 2. $z_2 = j^2z_1$ et $z_3 = jz_1$.
Dans le cas 1, la relation se traduit par
$$z_1^2 = \frac{1}{(1-j)j^2} = \frac{j}{1-j}$$
$$\Rightarrow A^2 = \left(\frac{j}{(1-j)}\right)^3 = \frac{1}{1-3j+3j^2-1} = \frac{i}{3\sqrt{3}}$$
De manière analogue, dans le cas 2, la relation se traduit par :
$$z_1^2 = \frac{1}{(1-j^2)j} = \frac{j^2}{1-j^2}$$
$$\Rightarrow A^2 = \left(\frac{j^2}{(1-j^2)}\right)^3 = \frac{1}{1-3j^2+3j-1} = -\frac{i}{3\sqrt{3}}$$
On obtient donc 4 valeurs possibles pour A (qui sont les racines quatrièmes de $-\frac{1}{27}$).

36. (Ccp36) En développant,
$$\frac{1}{2}\left((b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\right)$$
$$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$
et
$$(aj^2+bj+c)(aj+bj^2+c)$$
$$= a^2+b^2+c^2+ab(j+j^2)+ac(j+j^2)+bc(j+j^2)$$
On conclut avec
$$1+j+j^2 = 0$$
Ce calcul prouve directement l'équivalence entre les conditions 2 et 4 de la dernière question de l'exercice 14.

37. (Ccp37) On utilise la méthode usuelle pour transformer les différences d'exponentielles :
$$\frac{b-m}{a-m} = e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\frac{\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}$$
$$\frac{b-m'}{a-m'} = e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\frac{\sin\frac{\beta-\theta'}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta'}{2}}$$
À cause des inégalités, on connait les signes des sin, les demi-différences sont dans $]-\pi,\pi[$. On en déduit que la différence entre deux arguments est égale à π modulo 2π.
On reconnait le théorème de l'arc capable. Il se transporte à un cercle quelconque avec une similitude $z \mapsto uz+v$.

38. (Ccp38)

a. Points fixes de h :
$$h(z) = z \Leftrightarrow z+2i = z-iz^2$$
$$\Leftrightarrow z^2 = -2$$
Les points fixes sont $p = i\sqrt{2}$ et $q = -i\sqrt{2}$.

b. Le birapport cherché est
$$\beta = \frac{(p-h(z))(q-z)}{(q-h(z))(p-z)}$$
En utilisant seulement le fait que p et q sont fixes (pas les expressions du a.), on trouve
$$p-h(z) = h(p)-h(z) = \frac{z-p}{(1-ip)(1-iz)}$$
De même
$$q-h(z) = h(q)-h(z) = \frac{z-q}{(1-iq)(1-iz)}$$
On en déduit (après simplifications)
$$\beta = \frac{1-iq}{1-ip} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2})^2$$

39. (Ccp39) En prenant le carré du module :
$$-z_1 = z_2+z_3 \Rightarrow 2\,\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3}) = -1$$
$$\Rightarrow |z_2-z_3|^2 = 3.$$
De même pour les autres longueurs, donc le triangle est équilatéral.

40. (Ccp40)

a. On résoud le système de 2 équations aux inconnues u et v
$$\begin{cases} s(b) = b \\ s(c) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{b}u+v = b \\ \bar{c}u+v = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{b}-\bar{c})u = b-c \\ (b-c)v = b^2-c^2 \end{cases}$$
Après simplification à cause du module 1 :
$$u = -bc, \qquad v = b+c$$
$$\forall z \in \mathbb{C},\ s(z) = -bc\overline{z}+b+c.$$

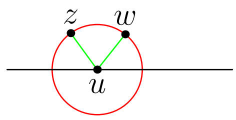

FIG. 4 – Exercice 41

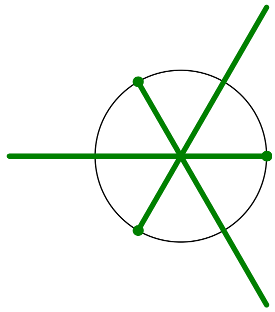

FIG. 5 – Exercice 42 (Ccp42)

b. Expression de $s \circ s$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} s \circ s(z) = s(s(z)) &= -bc(\overline{-bc\overline{z} + b + c}) + b + c \\ &= |bc|^2 z - bc(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + (b + c) = z \end{aligned}$$

L'affixe m d'un point de la droite (BC) est de la forme

$$c + \lambda(b - c) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculons son image par s

$$\begin{aligned} s(m) &= -bc(\overline{c + \lambda(b - c)}) + b + c \\ &= s(c) - bc\overline{\lambda(b - c)} = c - \lambda bc(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}) \\ &= c - \lambda(c - b) = m \end{aligned}$$

41. (Ccp41) On cherche à montrer qu'il existe un unique u réel tel que
$$|z - u|^2 = |w - u|^2 .$$
Ceci est en fait une équation du premier degré en u car les $|u|^2$ se simplifient en développant. On obtient donc une unique solution
$$u = \frac{|z|^2 - |w|^2}{2\,(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(w))}$$

42. (Ccp42) L'ensemble est formé par les points de trois demi-droites (figure 5). L'ensemble des affixes étant
$$]-\infty, 2[\cup \left\{ \lambda e^{\frac{2i\pi}{3}}, \lambda \in]-\infty, 2[\right\} \cup \left\{ \lambda e^{\frac{-2i\pi}{3}}, \lambda \in]-\infty, 2[\right\}$$

43. (Ccp43) On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. Si z est solution, la partie imaginaire de l'expression ($= 2xy$) doit être nulle. Les solutions sont donc réelles ou imaginaires pures. On est amené à chercher

$$\begin{array}{lll} x > 0 & \text{tq } x^2 + 3x - 4 = 0 & : 1 \\ x < 0 & \text{tq } x^2 - 3x - 4 = 0 & : -1 \\ y > 0 & \text{tq } -y^2 + 3y - 4 = 0 & : \emptyset \\ y < 0 & \text{tq } -y^2 - 3y - 4 = 0 & : \emptyset \end{array}$$

Les deux dernières équations n'ont pas de solutions réelles (discriminant strictement négatif).

44. pas de correction pour Ecp44.tex

45. (Ccp45) On compare les carrés en développant :

$$\begin{aligned} &(|a - b| + |a + b|)^2 - (|a| + |b|)^2 \\ &\qquad = |a|^2 + |b|^2 + |a^2 - b^2| - 2|ab| \\ &\qquad\qquad = (|a| - |b|)^2 + |a^2 - b^2| \geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que l'égalité se produit si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

46. (Ccp46) Comme les z_i sont de même module, les quotients $\frac{z_k}{z_l}$ sont de module 1. Donc, pour $k \neq l$,

$$\begin{aligned} \frac{z_k}{z_l} + \frac{z_l}{z_k} = \frac{z_k}{z_l} + \overline{\frac{z_k}{z_l}} &= 2\,\mathrm{Re}(\frac{z_k}{z_l}) \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow z = n + \sum_{1 \leq k < l \leq n} &2\,\mathrm{Re}(\frac{z_k}{z_l}) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme les quotients sont de module 1, les parties réelles sont plus petites que 1 et il existe $\frac{n(n-1)}{2}$couples (k, l) avec $k < l$:

$$z \leq n + \frac{n(n-1)}{2}\,2 = n^2.$$

Pourquoi z est-il positif ? Introduisons le module commun R et des arguments : $z_k = Re^{i\theta_k}$.

$$\begin{aligned} z &= (z_1 + \cdots + z_n)(\frac{1}{z_1} + \cdots \frac{1}{z_n}) \\ &= R\,\underbrace{(e^{i\theta_1} + \cdots + e^{i\theta_n})}_{=S}\frac{1}{R}\underbrace{(e^{-i\theta_1} + \cdots + e^{-i\theta_n})}_{=\overline{S}} \\ &= |S|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

47. (Ccp47) Les conditions caractérisant la symétrie se traduisent par :

$$\begin{aligned} \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{cases} z + z' = \lambda u \\ z - z' = i\mu u \end{cases} &\Rightarrow 2z = \lambda + i\mu \\ &\Rightarrow \lambda + i\mu = \frac{2z}{u}. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} 2z' = \lambda - \mu i u = \overline{(\lambda + i\mu)}\,u \Rightarrow 2z' &= \overline{\left(\frac{2z}{u}\right)}\,u \\ &\Rightarrow z' = \frac{u}{\overline{u}}\,\overline{z}. \end{aligned}$$

48. pas de correction pour Ecp48.tex