1. (Ecu01) Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre m, les équations ou inéquations

$$\begin{aligned}(m+1)x+2-m &= 0 && (1)\\ \frac{m}{x-1} &\leq \frac{1}{x+2} && (2)\\ \sqrt{2x+m} &\geq x+1 && (3)\end{aligned}$$

2. (Ecu02)
   a. On considère un trinôme ax^2+bx+c de discriminant Δ. Montrer que ce trinôme admet deux racines réelles distinctes strictement inférieures à 1 si et seulement si :
   $$\begin{cases} a>0\\ 2a+b>0\\ \Delta>0\\ a+b+c>0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a<0\\ 2a+b<0\\ \Delta>0\\ a+b+c<0\end{cases}$$
   b. Déterminer les réels m tels que l'équation
   $$(2m-1)x^2+2(m+1)x+m+3=0$$
   ait deux racines réelles inférieures ou égales à 1.
3. (Ecu03) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$.
4. (Ecu04) Soit $a>0$, $b>0$, $c>0$, montrer que
$$a+\frac{1}{a}\geq 2,\ (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$$
$$(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc.$$
5. (Ecu05) Soit $a=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$, $b=\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$, $d=a-b$, $p=ab$. Exprimer a^3-b^3 en fonction de d et de p. En déduire la valeur de d.
6. (Ecu06) Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.
7. (Ecu07) Simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ et $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.
8. (Ecu08) Soit $\omega\neq 1$ tel que $\omega^n=1$. Calculer les sommes
$$\sum_{k=0}^{n}\omega^k,\quad \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k,$$
$$A_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}, B_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$$
où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre x.
9. (Ecu09) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1,\cdots,a_n)\in[1,+\infty[^n$,
$$2^{n-1}(a_1a_2\cdots a_n+1)\geq(a_1+1)\cdots(a_n+1).$$
10. (Ecu10) Soit a et b deux nombres réels tels que $0<a<b$. On considère les équations d'inconnue réelle x
$$\begin{aligned}\sqrt{x}=\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x} && (1)\\ 3x-(a+b)=2\sqrt{(a-x)(b-x)} && (2)\\ 5x^2-2(a+b)x+(a-b)^2=0 && (3)\end{aligned}$$
    a. Comparer les ensembles de solution de (1), (2), (3).
    b. Étudier la fonction
    $$x\rightarrow\sqrt{x}-\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}$$
    c. On fixe b. Discuter, suivant les valeurs de a, de l'existence et du nombre de solutions de (1).
11. (Ecu11) Exprimer les sommes en fonction de $n\geq 2$:
$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k},$$
$$\sum_{k \text{ pair}\in\{0,\cdots,n\}}k\binom{n}{k},\quad \sum_{k\text{ impair}\in\{1,\cdots,n\}}k\binom{n}{k},$$
$$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},$$
$$p\in[\![0,n]\!]\ \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$
12. (Ecu12) Démontrer, pour tous les entiers n non nuls
$$\sum_{k\in\{1,\cdots,n\}}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$
$$\sum_{k\in\{1,\cdots,n\}}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$
$$2!4!\cdots(2n)!\geq((n+1)!)^n$$
Soit n et p deux entiers ($0\leq n\leq p$). Montrer que
$$\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n}=\binom{p+1}{n+1}$$
13. (Ecu13) Soit $n\geq 3$ un entier, trouver une autre expression de A, B, C pour
$$A=\sum_{k\in\{0,\cdots n\},k\equiv 0 \mod 3}\binom{n}{k}$$
$$B=\sum_{k\in\{0,\cdots n\},k\equiv 1 \mod 3}\binom{n}{k}$$
$$C=\sum_{k\in\{0,\cdots n\},k\equiv 2 \mod 3}\binom{n}{k}$$
14. (Ecu14) Suite de Fibonacci et coefficients du binôme
La suite de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $f_0=1$, $f_1=1$ et
$$\forall n\geq 2,\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}.$$
Montrer que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n=\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\leq n-k}}\binom{n-k}{k}.$$
On pourra visualiser les places des termes de la somme dans le triangle de Pascal.

15. (Ecu15) Pour n naturel non nul, on pose
$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$
En regroupant les termes par deux, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En ajoutant les termes qui manquent, majorer cette suite par une sommation en domino. En déduire sa convergence.

16. (Ecu16) Une entreprise chargée de repeindre un appartement est constituée de 3 peintres $P1$,$P2$, $P3$. Le tableau suivant indique le temps mis par chaque peintre pour faire le travail s'il est tout seul.

P_1	P_2	P_3
3 h	2 h	5 h

Combien de temps mettront-ils pour repeindre ensemble l'appartement ?

17. (Ecu17) Nombres de Fermat.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on défnit F_n par
$$F_n = 2^{(2^n)} + 1$$
Préciser F_0, F_1, F_2, F_3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_0 F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2$$

18. (Ecu18) Soit a, b, c, d réels, montrer que
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da \Rightarrow a = b = c = d$$

19. (Ecu19) Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des nombres réels tels que
$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$
En utilisant l'exercice 23 (inégalité de Cauchy-Schwarz), montrer qu'ils sont tous égaux à 1.

20. (Ecu20) Soit x, y, z des réels strictement positifs.
Montrer que
$$(1+x)(1+x^2+x^4) = (1+x+x^2)(1+x^3)$$
En déduire que $A = B$ avec
$$A = \left((1+x)^y + (1+x+x^2)^y\right)^z \left((1+x^3)^z + (1+x^2+x^4)^z\right)^y$$
$$B = \left((1+x)^z + (1+x+x^2)^z\right)^y \left((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y\right)^z$$

21. (Ecu21) Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition
$$(\mathcal{P}_n) \qquad \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\quad x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$$
   a. Montrer $(\mathcal{P}_2)$.
   b. Montrer que $(\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n-1})$ pour $n \geq 2$. On posera
$$x_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$
   c. Montrer que $((\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_n)) \Rightarrow (\mathcal{P}_{2n})$.
   d. Montrer $(\mathcal{P}_n)$ pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$.

22. (Ecu22) Montrer l'encadrement
$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

23. (Ecu23) Autour de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
On considère des réels
$$x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$$
   a. En considérant la factorisation canonique de
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + t y_k)^2$$
   pour $t \in \mathbb{R}$, montrer *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$
   b. Montrer que
$$\sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} (x_k y_l - x_l y_k)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2$$
   c. En déduire une autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

24. (Ecu24) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, on pose
$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$
Simplifier P_n et préciser la limite. Même question avec
$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

25. (Ecu25) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$M = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \max(i,j), \qquad S = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (i+j).$$
En déduire
$$m = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j), \qquad a = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |i-j|$$

26. (Ecu26) Pour $n \geq 2$, exprimer les quotients suivants uniquement à l'aide de factorielles
$$\frac{\text{Produit des impairs de 1 à } 2n}{\text{Produit des pairs de 1 à } 2n},$$
$$\frac{\text{Produit des pairs de 1 à } 2n+1}{\text{Produit des impairs de 1 à } 2n+1}$$

27. (Ecu27) Soit $n \geq 2$ entier et $0 \leq p \leq n-2$. Montrer que
$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

28. (Ecu28) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$$

29. (Ecu29) Soit $n \geq 2$ entier $z \in \mathbb{C}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer S_n et T_n
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^k + z\right)^n$$

30. (Ecu30) Pour $n \geq 2$ entier, montrer que
$$\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

31. (Ecu31) Soit $a \in \left]-1, 1\right[$.
   a. Montrer que
   $$\forall x \in [-a, a], \forall t \in [0, \pi],\ 1 - a \leq \left|x - e^{it}\right| \leq 1 + a.$$
   On pourra comparer les carrés et introduire $|x|$.
   b. Montrer que $\forall a > 0$, $\ln(1+a) < -\ln(1-a)$.
   c. Montrer que
   $$\forall x \in [-a, a], \forall t \in [0, \pi],\ \left|\ln\left|x - e^{it}\right|\right| \leq -\ln(1-a).$$

1. (Ccu01) Comme il s'agit de discuter sur le paramètre m, le résultat doit être de la forme suivante
   - Si m ceci alors l'ensemble des solutions est ...
   - Si m cela alors l'ensemble des solutions est ...

   Il ne doit JAMAIS apparaitre quelque chose du genre « Si x ceci alors ... »
   On doit transformer l'équation ou l'inéquaion proposée en une autre équivalente et d'une forme plus commode pour la résolution.

   Étude de l'équation (1).

   On peut discuter et répondre directement
   - Si $m = -1$ l'ensemble des solutions est vide
   - Si $m \neq 1$ alors l'ensemble des solutions est
   $$\left\{ \frac{m-2}{m+1} \right\}$$

   Étude de l'inéquation (2).

   On transforme l'inéquation
   $$(2) \Leftrightarrow \frac{m}{x-1} - \frac{1}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{m(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$
   Lorsque $m-1 \neq 0$, on peut factoriser encore et tout revient à placer
   $$h(m) = \frac{1+2m}{1-m}$$
   par rapport à -2 et 1. On étudie la fonction h ainsi définie. Il s'agit d'une fonction *homographique* dont les propriétés suivantes doivent être connues.
   On peut la décomposer
   $$h(m) = \frac{1+2(m-1)+2}{1-m} = -2 + \frac{3}{1-3}$$
   Son graphe (figure 1) est une hyperbole et elle est stric-

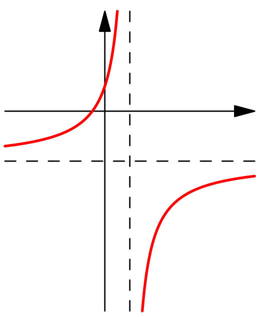

FIG. 1 – Exercice 1 : graphe de h

   tement croissante dans chaque intervalle de définition. De plus $h(m) = 0$ est impossible et $h(m) = 1 \Leftrightarrow m = 0$.
   Tout revient à étudier le signe de
   $$(m-1)\frac{x-h(m)}{(x-1)(x+2)}$$
   - Si $m \leq 0$: $(m-1) < 0$, $-2 < h(m) \leq 1$. L'ensemble des solutions est
   $$]-2, h(m)] \cup [0, +\infty[$$
   Ceci contient le cas particulier $]-2, +\infty[$ pour $m = 0$.
   - Si $0 < m < 1$: $(m-1) < 0$, $-2 < 1 < h(m)$. L'ensemble des solutions est
   $$]-2, 1[\cup [h(m), +\infty[$$
   - Si $0 < 1 < m$: $(m-1) > 0$, $h(m) < -2 < 1$. L'ensemble des solutions est $]-\infty, h(m)[\cup]-2, -1[$.

   Étude de l'inéquation (3).

   On considère la fonction φ_m définie par
   $$\varphi_m(x) = \sqrt{2x+m} - (x+1)$$
   Il s'agit alors de discuter selon m de l'ensemble des x pour lesquels $\varphi_m(x) \geq 0$.
   On sait que la fonction est définie et continue dans $\left[-\frac{m}{2}, +\infty\right[$ et que sa limite est $-\infty$ en $+\infty$.
   Considérons l'équation $\varphi_m(x) = 0$:
   $$(3i) \qquad \varphi_m(x) = 0 \Rightarrow 2x+m = (x+1)^2$$
   $$\Leftrightarrow x^2 = m-1 \qquad (3f)$$
   - Lorsque $m < 1$, l'équation $(3f)$ n'a ps de solution donc $(3i)$ non plus. Comme la fonction est continue, négative en $+\infty$, continue et ne s'annulant pas, elle est toujours à valeur strictement négatives d'après le théorème de la valeur intermédiaire. Il n'y a donc pas de solution à l'inéquation dans ce cas.
   - Lorsque $m \geq 1$, $a_m = -\sqrt{m-1}$ et $b_m = \sqrt{m-1}$ sont les solutions de $(3f)$. De plus
   $$-\frac{m}{2} \leq a_m \leq b_m$$
   En effet, le signe de $\frac{m}{2} - \sqrt{m-1}$ est le même que celui de
   $$\left(\frac{m}{2} - \sqrt{m-1}\right)\left(\frac{m}{2} + \sqrt{m-1}\right)$$
   $$= \frac{m^2}{4} - m + 1 = \frac{(m-2)^2}{4} \geq 0$$
   Pour autant, a_m et b_m ne sont pas forcément des solutions de $(3i)$ car ils vérifient
   $$2x+m = (x+1)^2$$
   mais pas forcément
   $$\sqrt{2x+m} = x+1$$
   En fait $b_m + 1 > 0$ donc b_m est toujours solution de $(3i)$ alors que
   $$a_m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \in [1, 2]$$
   Lorsque $m \in [1, 2]$, la fonction φ_m s'annule deux fois en $a_n < b_m$ et en changeant de signe (étude dérivée). L'ensemble des solutions est alors
   $$[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$$

Lorsque $m > 2$, la fonction s'annule seulement en b_n (en changeant de signe). L'ensemble des solutions est

$$[-\frac{m}{2}, \sqrt{m-1}]$$

Il faudrait examiner plus sérieusement les cas particuliers $m = 1, 2$.

2. (Ccu02)

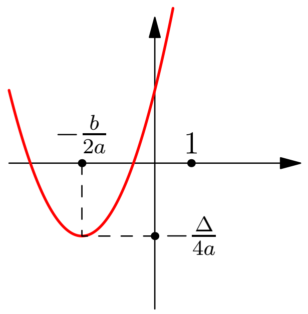

FIG. 2 – Exercice 2 : Configuration 1.

a. On sait que le graphe de la fonction associée à un trinôme est une parabole qui peut être orientée vers le haut ou vers le bas.
Il convient de détailler (ce qui n'est pas fait ici) dans le cas $a > 0$, la preuve de l'équivalence entre l'existence de deux racines < 1 (Figure 2 : Configuration 1) et les conditions

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < 1 \\ \Delta > 0 \\ a1^2 + b1 + c > 0 \end{cases}$$

qui se ramènent facilement à celles de l'énoncé. Le cas $a < 0$ est analogue.

b. On exprime

$$\begin{aligned} &a = 2m - 1 \\ &\Delta = -4(m-1)(m+4) \\ &a + b + c = 5m + 4 \\ &2a + b = 6m \end{aligned}$$

On forme le tableau des signes des expressions à considérer en rangeant les valeurs où le signe change

$$-4 < -\frac{4}{5} < 0 < \frac{1}{2} < 1$$

On trouve finalement que l'ensemble cherché est

$$[-\frac{5}{4}, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[$$

3. (Ccu03) La fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

est définie dans $I = [-1, 3]$, décroissante dans cet intervalle, avec $f(-1) = 2$ et $f(3) = -2$. L'ensemble des nombres pour lesquels cette fonction prend une valeur $> \frac{1}{2}$ est donc $[-1, a[$ où a est la solution de $f(x) = \frac{1}{2}$.
On peut obtenir une expression de a avec des racines carrées.
Pour $x \in I$, notons $u = \sqrt{3-x}$ et $v = \sqrt{x+1}$, alors :

$$u^2 + v^2 = 4$$

Si $f(x) = \frac{1}{2}$ alors

$$\begin{aligned} u = v + \frac{1}{2} &\Rightarrow (v + \frac{1}{2})^2 + v^2 = 4 \\ &\Rightarrow 2v^2 + v - \frac{15}{4} = 0 \text{ racines } \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{4} \end{aligned}$$

Comme $5 < \sqrt{31}$,

$$\frac{-1-\sqrt{31}}{4} < -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} < -1$$

l'ensemble des solutions est :

$$\left[-1, \frac{-1+\sqrt{31}}{4}\right[$$

4. (Ccu04) On peut considérer la somme de deux nombres positifs inverses l'un de l'autre

$$\forall t > 0,\ t + \frac{1}{t} \geq 2$$

qui résulte de $(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^2 \geq 0$.
On en déduit $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1$ d'où la première inégalité. En la réécrivant avec un carré (ce qui permet aussi de la montrer) et en multipliant on obtient la seconde

$$\left.\begin{aligned} (a+b)^2 \geq 4ab \\ (b+c)^2 \geq 4bc \\ (c+a)^2 \geq 4ca \end{aligned}\right\} \Rightarrow ((a+b)(b+c)(c+a))^2 \leq (8abc)^2$$

5. (Ccu05) Avec des identités remarquables :

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a-b)((a-b)^2 + 3ab) = d(d^2 + 3p) \end{aligned}$$

Comme $a^3 - b^3 = 6$ et $p = \frac{5}{3}$, le nombre d est racine de l'équation

$$z^3 + 5z = 6$$

Comme 1 est une racine évidente, on peut factoriser :

$$z^3 + 5z - 6 = (z-1)(z^2 + z + 6)$$

L'équation $z^2 + z + 6$ est sans racine réelle, on en déduit que $d = 1$.

6. (Ecu06) On procède comme dans l'exercice 5. Le nombre d à simplifier vérifie

$$d^3 + 3d - 14 = 0 \Leftrightarrow (d-2)(d^2 + 2d + 7) = 0$$

L'équation du second degré $d^2 + 2d + 7 = 0$ n'a pas de racine réelle, on en déduit $d = 2$.

7. (Ecu07) Notons :
$$s = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$
$$d = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} - \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$
On peut simplifier les produits :
$$sd = 4\sqrt{a-1} \qquad s^2 = 4(a-1)$$
On en tire
$$s = 2\sqrt{a-1}, \qquad d = 2$$

8. (Ecu10) Sommes géométriques et formules du binôme.
$$\sum_{k=0}^{n} \omega^k = \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega^k = (1+\omega)^n - \omega^n$$
$$A_n + iB_n = (1+i)^n \Rightarrow \begin{cases} A_n = 2^n \cos\dfrac{n\pi}{4} \\ B_n = 2^n \sin\dfrac{n\pi}{4} \end{cases}$$

9. (Ecu09) On raisonne par récurrence.
Pour $n = 2$, après développement, l'inégalité est équivalente à $a_1a_2 + 1 - a_1 - a_2 \geq 0$. Or
$$\begin{aligned} a_1a_2 + 1 - a_1 - a_2 &= a_1(a_2-1) + 1 - a_2 \\ &= (a_2-1)(a_1-1) \geq 0 \end{aligned}$$
Montrons que l'inégalité au rang $n-1$ entraîne celle au rang n.
$$\begin{aligned} (a_1)\cdots(a_n) &\leq 2^{n-2}(a_1\cdots a_{n-1}+1)(a_n+1) \\ &\leq 2^{n-2}\left((a_1\cdots a_n + 1) + (a_1\cdots a_{n-1} + a_n)\right) \end{aligned}$$
Or :
$$\begin{aligned} &(a_1\cdots a_n + 1) - (a_1\cdots a_{n-1} + a_n) \\ &= a_1\cdots a_{n-1}(a_n-1) + (1-a_n) \\ &= (a_1\cdots a_{n-1} - 1)(a_n - 1) \geq 0 \end{aligned}$$
On en conclut
$$(a_1)\cdots(a_n) \leq 2^{n-1}(a_1\cdots a_n + 1)$$

10. (Ccu10)
   a. En élevant au carré, on obtient que les solutions de (1) sont solution de (2) et que les solutions de (2) sont solution de (3).
   b. La fonction est strictement croissante dans $[0, a]$ d'après les propriétés de la fonction racine carrée.
   c. On désigne par φ la fonction de la question b.. L'équation (1) revient à
   $$\varphi(x) = 0$$
   La fonction φ prend ses valeurs dans
   $$\left[-(\sqrt{a}+\sqrt{b}), \sqrt{a} - \sqrt{b-a}\right]$$
   L'équation (1) admet une unique solution si et seulement si
   $$\sqrt{a} - \sqrt{b-a} \geq 0 \Leftrightarrow b \leq 2a$$
   Dans ce cas, cette solution est également solution de (2) et de (3). L'équation (3) admet donc deux solutions réelles, l'une d'entre elle est celle de l'équation (1).

11. (Ecu11) Ces sommes se calculent de deux manières. En utilisant la relation entre coefficients du binôme
$$k \geq 1, \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
ou bien en dérivant des fonctions. Détaillons cette deuxième idée.
Définissons une fonction φ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$$
On en déduit, avec les règles de dérivation,
$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1} = n(1+t)^{n-1}$$
(le premier terme disparait en dérivant) On en déduit
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \varphi'(1) = n2^{n-1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} = -\varphi'(-1) = 0$$
Notons
$$A = \sum_{k \text{ pair } \in\{0,\cdots,n\}} k\binom{n}{k}, \quad B = \sum_{k \text{ impair } \in\{1,\cdots,n\}} k\binom{n}{k}$$
alors
$$\left.\begin{aligned} -A + B &= \varphi'(-1) = 0 \\ A + B &= \varphi'(1) = n\,2^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = B = n\,2^{n-2}$$
Calcul de $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$: à compléter.
Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$: à compléter.
Calcul de $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$. On exprime les coefficients du binôme avec des factorielles que l'on redistribue. On obtient
$$2^p\binom{p}{n}$$

12. (Ccu12) Les deux premières relations s'obtiennent par sommation en dominos à partir des relations
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$
$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$
La troisième relation se démontre par récurrence.
Pour $n = 1$, elle s'écrit $2! \geq 2!$.

Montrons que l'inégalité à l'ordre n entraîne celle à l'ordre suivant.

$$\begin{aligned}((n+2)!)^{n+1} &= ((n+1)!)^n (n+1)!(n+2)^{n+1} \\ &\leq (2!4!\cdots(2n)!)\,(n+1)!(n+2)^{n+1}\end{aligned}$$

On doit donc montrer que

$$(n+1)!(n+2)^{n+1} \leq (2n+2)!$$

Or :

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)^{n+1}} = \frac{(n+3)(n+4)\cdots(2n+2)}{(n+2)^n}$$

et le dénominateur contient $2n+2-n-3+1 = n$ facteurs tous plus grands que $n+2$. Le quotient est donc plus grand que 1.
La dernière relation est encore une sommation en dominos obtenue à partir de la formule du triangle de Pascal. Pour $n < k$,

$$\begin{aligned}\binom{k}{n} + \binom{k}{n+1} &= \binom{k+1}{n+1} \\ \Rightarrow \binom{k}{n} &= \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \\ \Rightarrow \sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n} &= 1 + \sum_{k=n+1}^{p}\left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}\right) \\ &= \binom{p+1}{n+1}\end{aligned}$$

On peut démontrer ce résultat de plusieurs autres manières.

13. (Ecu13) Les indices des sommes proposées recouvrent $[\![0,n]\!]$, ils sont regroupés modulo 3. Deux puissances de j sont égales lorsque les exposants sont congrus modulo 3. On peut combiner les sommes proposées pour faire apparaitre des formules du binôme.

$$\begin{cases} A+B+C & = (1+1)^n = 2^n \\ A + jB + j^2C & = (1+j)^n = (-j^2)^n \\ A + j^2B + jC & = (1+j^2)^n = (-j)^n \end{cases}$$

En combinant linéairement, on déduit

$$\begin{aligned}3A &= 2^n + (-1)^n 2\cos\frac{2n\pi}{3} \\ 3B &= 2^n + (-1)^n 2\cos\frac{2(n+1)\pi}{3} \\ 3C &= 2^n + (-1)^n 2\cos\frac{2(n-1)\pi}{3}\end{aligned}$$

14. pas de correction pour Ecu14.tex

15. (Ccu15) En regroupant deux par deux les termes consécutifs,

$$a_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times(2n)}$$

On en tire que la suite est croissante avec

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{(2n-1)\times(2n)}$$

On reconnait une suite qui s'exprime comme une différence de termes consécutifs :

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On ajoute les termes en

$$\frac{1}{2\times 3}, \frac{1}{4\times 5}\cdots$$

qui manquent pour pouvoir sommer en domino. On en déduit

$$\begin{aligned}a_n \leq \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots \\ + \frac{1}{(2n-2)\times(2n-1)} + \frac{1}{(2n-1)\times(2n)} \\ = 1 - \frac{1}{2n} \leq 1\end{aligned}$$

On en tire la convergence de la suite comme suite croissante majorée.

16. (Ccu16) On peut déduire du tableau, la « vitesse de peinture » de chacun. Notons les V_1, V_2, V_3 et S la surface de l'appartement (en m^2).

V_1	V_2	V_3
$\frac{S}{3}$	$\frac{S}{2}$	$\frac{S}{5}$

Au bout d'un temps t de travail (en heure), P_i a peint $V_i t$ mètres carrés. Ensemble, les 3 peintres ont couvert

$$S_t = (V_1 + V_2 + V_3)t = (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5})St$$

Ils ont terminé lorsque $S_t = S$, le temps cherché (en heures) est donc

$$\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = \frac{30}{31} = \frac{1}{1+\frac{1}{30}} \simeq 1 - \frac{1}{30} \simeq 58\text{mn}.$$

car 1/30 ème d'heure égale 2 minutes.

17. (Ccu17) Les 8 premières puissances de 2 sont 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. On en déduit

$$\begin{aligned}F_0 &= 2^{(2^0)} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \\ F_1 &= 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \\ F_2 &= 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \\ F_3 &= 2^{(2^3)} + 1 = 2^8 + 1 = 257\end{aligned}$$

La formule à prouver est donc vérifiée pour $n = 1, 2, 3$. On l'étend par récurrence à $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&F_0F_1\cdots F_{n-1} = F_n - 2 \\ &\quad\Rightarrow F_0F_1\cdots F_{n-1}F_n = (F_n-2)F_n \\ &= (2^{(2^n)}-1)(2^{(2^n)}-1) = 2^{2\times(2^n)} - 1 = 2^{(2^{n+1})} - 1 \\ &= F_{n+1} - 2\end{aligned}$$

18. (Ccu18) Avec les quadruplets de réels (a,b,c,d) et (b,c,d,a), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit
$$ab+bc+cd+da \leq a^2+b^2+c^2+d^2$$
car les deux sommes de carrés sont égales. Le cas d'égalité dans l'inégalité entraine l'existence d'un λ tel que $b=\lambda a$, $c=\lambda b$, $d=\lambda c$, $a=\lambda d$. On en tire $\lambda^4=1$ donc λ vaut 1 ou -1.
Le cas -1 conduisant à
$$ab+bc+cd+da \leq -(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
On en déduit le résultat demandé.

19. (Ccu19) L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux n-uplets $(x_1,\cdots,x_n)$ et $(1,\cdots,1)$ conduit à
$$|x_1+\cdots+x_n| \leq \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{n}=n$$
On est donc dans le cas d'égalité et tous les x_i sont égaux entre eux. La seule valeur possible est 1.

20. (Ccu20) On peut vérifier directement en développant ou utiliser ($x\neq 1$) une somme de termes en progression géométrique
$$\begin{aligned}1+x^2+x^4 &= 1+x^2+(x^2)^2=\frac{1-x^6}{1-x^2}\\ &= \frac{(1-x^3)(1+x^3)}{(1-x)(1+x)}=\frac{(1+x+x^2)(1+x^3)}{(1+x)}\end{aligned}$$
Transformons A en utilisant la relation précédente sous forme d'égalité de quotients
$$\begin{aligned}A &= (1+x)^{yz}(1+x^3)^{yz}\\ &\left(1+\left(\frac{1+x+x^2}{1+x}\right)^y\right)^z\left(1+\left(\frac{1+x^2+x^4}{1+x^3}\right)^z\right)^y\\ &= (1+x)^{yz}(1+x^3)^{yz}\\ &\left(1+\left(\frac{1+x^2+x^4}{1+x^3}\right)^y\right)^z\left(1+\left(\frac{1+x+x^2}{1+x}\right)^z\right)^y\\ &= \left((1+x^3)^y+(1+x^2+x^4)^y\right)^z\\ &\qquad\left((1+x)^z+(1+x+x^2)^z\right)^y=B\end{aligned}$$

21. (Ccu21) Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques.
   a. On remarque que $(\mathcal{P}_1)$ est évident et que $(\mathcal{P}_2)$ résulte de
$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_1-x_2)^2\geq 0$$
   b. Pour $x_1,\cdots,x_{n-1}$ donnés, posons
$$x_n=\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$
alors, d'après $(\mathcal{P}_n)$,
$$\begin{aligned}x_1\cdots x_{n-1} &= \frac{1}{x_n}x_1\cdots x_n\\ &\leq \frac{1}{x_n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n\end{aligned}$$
Or
$$x_1+\cdots+x_n=\frac{n}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1})$$
d'où
$$\begin{aligned}x_1\cdots x_{n-1} &\leq \frac{1}{x_n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n\\ &= \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\end{aligned}$$
   c. Dans la racine du produit, regroupons les termes deux par deux et utilisons $(\mathcal{P}_n)$ puis n fois $(\mathcal{P}_2)$:
$$\begin{aligned}\sqrt{x_1\cdots x_{2n}} &= \sqrt{(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{2n-1}x_{2n})}\\ &\leq \left(\frac{\sqrt{x_1x_2}+\cdots+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}}{n}\right)^n\leq\\ &\left(\frac{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2+\cdots+(\sqrt{x_{2n-1}}+\sqrt{x_{2n}})^2}{2n}\right)^n\\ &\leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}+x_{2n}}{2n}\right)^n\end{aligned}$$
car les termes croisés des développement des carrés sont positifs. On en déduit l'inégalité $(\mathcal{P}_{2n})$ en prenant le carré.
   d. En utilisant la question précédente, on montre par récurrence que $(\mathcal{P}_{n^k})$ est vraie pour tous les entiers k. Pour n'importe quel entier n, il existe un k tel que $n\leq 2^k$, la question b. entraine alors (par récurrence encore) $(\mathcal{P}_n)$.

22. (Ccu22) Une première idée est de remarquer que $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des $\binom{2n}{k}$. On en déduit que
$$4^2=(1+1)^{2n}\leq(2n+1)\binom{2n}{n}$$
mais l'inégalité obtenue est plus faible que celles qui sont demandées.
Une deuxième idée est de tirer parti de l'expression multiplicative d'un coefficient du binôme pour en déduire
$$Q_n=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}=\frac{\text{Pdt des impairs de 1 à } 2n}{\text{Pdt des pairs de 1 à } 2n}$$
Notons
$$u_n=\frac{1}{2\sqrt{n}},\qquad v_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$$
et comparons les quotients de termes consécutifs.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n}=\frac{2n+1}{2(n+1)}$$
Après calculs, on trouve que
$$\left(\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right)^2-\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2=\frac{1}{4(n+1)^2}>0$$

et que

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^3 - \left(\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right)^3 = -\frac{4n^2+2n-1}{8(n+1)^3} > 0$$

Comme

$$Q_1 = u_1 = \frac{1}{2} < v_1 = 1$$

On obtient bien l'encadrement demandé.

23. (Ccu23)

a. Par définition, l'expression est du second degré en t et positive pour tous les t réels. On peut l'ordonner en t :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n} x_k y_k\right) t + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

Comme elle est toujours positive ou nulle, son discriminant est négatif ou nul ce qui donne l'inégalité demandée.

b. On développe $(x_k y_l - x_l y_k)^2$ et on somme. Les termes peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned}\sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} x_k^2 y_l^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} y_l^2\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\end{aligned}$$

On montre de même que

$$\sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} x_l^2 y_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

Pour les termes croisés :

$$\begin{aligned}\sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} x_k y_k x_l y_l &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} x_l y_l\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2\end{aligned}$$

On en déduit la formule demandée.

c. On déduit l'inégalite de Cauchy-Schwarz de la question précédente car la somme à gauche de l'égalité est positive.

24. pas de correction pour Ecu24.tex

25. (Ccu25) Calcul de S.

$$\begin{aligned}S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni + \frac{1}{2}n(n+1)\right) \\ &= n^2(n+1)\end{aligned}$$

Pour le calcul de M, on s'appuie sur le schéma des valeurs (figure 3) qui permet de regrouper les valeurs égales.

$$M = \sum_{k=1}^{2}(2k-1)k$$

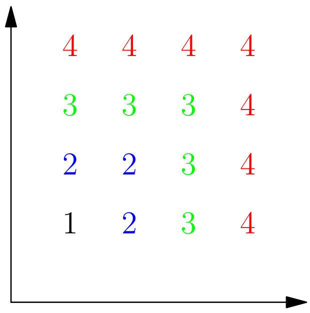

FIG. 3 – Exercice 25. $\max(i,j)$ (Ccu25)

On écrit $2k-1 = 2(k-1)+1$ d'où

$$\begin{aligned}M &= 2\sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{2}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\max(a,b) + \min(a,b) &= a+b \\ \max(a,b) - \min(a,b) &= |a-b|\end{aligned}$$

On calcule m et a avec les relations

$$m + M = S, \qquad M - n = a.$$

26. pas de correction pour Ecu26.tex

27. pas de correction pour Ecu27.tex

28. (Ccu28) Récurrence facile.

29. (Ccu29) En calculant le module, le calcul de S_n se ramène à une somme de sin associée à une progression géométrique. On trouve

$$S_n = 2n$$

Pour calculer T_n, on développe les termes de la somme suivant la formule du binôme puis on permute les sommations. Seuls deux termes subsistent. On obtient

$$T_n = n(z^n + 1)$$

30. (Ccu30)

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n} &= \frac{\overbrace{(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-n)}^{n \text{ facteurs}}}{n!} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2n\,\overbrace{(2n-1)(2n-2)\cdots}^{n-1 \text{ facteurs}}}{n!} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

en faisant passer le $2n - n = n$ de la droite à la gauche du numérateur.

31. pas de correction pour Ecu31.tex