1. (Ede01) Calculer un développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué entre parenthèses :

$$3\sin 2x - 2\sin 3x \ (4) \qquad \frac{\ln(1+x)}{1+x} \ (3)$$
$$\sqrt{1+\cos x} \ (4)$$
$$e^{\sin x} \ (3) \qquad \sqrt{1+\tan x} \ (3)$$
$$\frac{\sin x}{\ln(1+x)} \ (3) \qquad \tan^2 x^2 \ (4)$$
$$e^{\tan x} \ (4) \qquad \sqrt{1+\sqrt{1-x}} \ (2)$$
$$\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \ (10)$$

2. (Ede02) Montrer que le graphe de f définie par
$$f(x) = x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$$
admet 3 asymptotes que l'on déterminera. Montrer que le signe de f' est donné par celui d'un polynôme de degré 4 que l'on peut mettre sous la forme
$$(x^2-ax+1)(x^2-bx+1)$$

3. (Ede03) Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués en utilisant des développements
$$x\ln(x\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{x}) \text{ en } 0^+, \quad \frac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(2x)} \text{ en } 0,$$
$$\frac{\log_x a - \log_a x}{\mathrm{sh}\,x - \mathrm{sh}\,a} \text{ en } a \neq 1, \quad \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} \text{ en } 0,$$
$$e^{-x}\left(\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x} - \mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}\right) \text{ en } +\infty,$$
$$\frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} \text{ en } 1^+, \quad \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}} \text{ en } 1,$$
$$\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} \text{ en } a \neq 0.$$

4. (Ede04) Montrer que, pour tous les x de $[-1,+1]$,
$$\arccos x = 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$$
En déduire un développement de arccos en 1. (il s'agit d'un développement de Puiseux : les exposants de $1-x$ sont des demi-entiers)

5. (Ede05) Montrer que $f(x) = x + \ln(1+x)$ est bijective de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Former un développement limité de la bijection réciproque à l'ordre 3 en 0.
Soit $f(x) = 2x - \ln(1+x)$, montrer qu'il existe a et b ($a<0<b$) telle que la restriction de f sur $[a,b]$ définisse une bijection φ. Former un développement limité de la bijection réciproque ψ en 0.
De même, montrer que la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{x^2}$$
est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Former un développement limité en 0 à l'ordre 5 de la bijection réciproque.

6. (Ede06) Calculer à l'aide d'un développement limité la valeur en 0 de la dérivée à l'ordre 6 de
$$(1+x\sin x)^{x\tan x} \text{ et } \cos x^{x\tan x}$$

7. (Ede07) Soit a un réel, I un intervalle ouvert contenant a et f une fonction $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. Calculer la limite en 0 de
$$h \to \frac{1}{h^3}\left(f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)\right)$$
En déduire, pour $x>0$ fixé, la limite en 0 de
$$h \to \left(\frac{(x+3h)(x+h)^3}{(x+2h)^3x}\right)^{\frac{1}{h^3}}$$

8. (Ede08) Soit φ la fonction définie dans $\mathbb{R}$ privé des entiers impairs, périodique de période 2 et telle que
$$\forall x \in]-1,1[: \varphi(x) = \frac{x}{1-|x|}$$
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]2n, 2n+1[$ tel que $x_n = \varphi(x_n)$.
   b. Montrer que
$$x_n = 2n+1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})$$

9. (Ede09) Montrer qu'il existe un unique x_n tel que
$$\tan(x_n) = x_n \text{ et } x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$$
Montrer que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

10. (Ede10) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes
   – $(a_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie strictement positive.
   – $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement de la forme
$$a_n = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$$
   pour un certain réel a.

11. (Ede11) Former un développement limité en 0 à l'ordre 101 de la fonction
$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$$

12. (Ede12) Montrer que au voisinage de $+\infty$,
$$\int_1^x e^t \ln t\, dt \sim e^x \ln x$$

13. (Ede13) Soit a un réel fixé et f, g des fonctions continues définies dans $[a,+\infty[$ et à valeurs strictement positives. On pose, pour $x>0$,
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$
On suppose $G \to +\infty$ et f négligeable devant g en $+\infty$.

a. Montrer que F est négligeable devant G en $+\infty$.

b. Application. Pour k entier non nul, on note

$$f_k(x) = \frac{e^x}{x^k}, \qquad F_k(x) = \int_1^x f_k(t)\,dt$$

Former un équivalent en $+\infty$ à F_k. En déduire un développement asymptotique de F_1.

14. (Ede14) Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction y vérifiant

$$\begin{aligned} &y''(x) + y'(x) + y(x) = x\sin x \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{aligned}$$

15. (Ede15) Montrer que la suite

$$\left(\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge vers 0 puis chercher un développement asymptotique.

16. (Ede16) Soit $I =]0, +\infty[$ et f une fonction définie dans I par

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x})$$

a. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.

b. Montrer que f est convergente en 0. Si l est sa limite, on prolonge f à $[0, +\infty[$ en posant $f(0) = l$. Ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?

c. Déterminer les réels α, β, γ tels que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Quelle est la courbe simple asymptote au graphe de f ?

17. (Ede17) Montrer que, si $n \geq 2$, $X^n - nX + 1$ n'a qu'une racine (notée α_n) dans $[0, 1]$. Trouver un équivalent simple à $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.

18. (Ede18) Trouver un équivalent simple à

$$(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^k})_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

19. (Ede19) Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres réels strictement positifs (avec $\beta < \delta$), préciser les n tels que

$$\begin{aligned} &n^\alpha, (\ln n)^{n^\beta}, n^{(\ln n)^\gamma}, e^{n^\delta}, \\ &(\ln(\ln n))^{n^{\ln n}}, (\ln n)^{n^{\ln(\ln n)}}, (\ln n)^{n^{\ln n}} \end{aligned}$$

soient définis. Classer les suites correspondantes relativement à la relation de négligeabilité.

20. (Ede20) Montrer que

$$(\sum_{k=0}^{n} e^{k^2})_{n\in\mathbb{N}} \sim (e^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}.$$

21. (Ede21) Déterminer la limite de la suite

$$\left(\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

22. (Ede22) Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}; \quad \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)}; \quad (\cos x)^{\operatorname{cotan} x^2}; \\ &f(x) = x^x; \quad g(x) = x^{f(x)}; \quad h(x) = x^{g(x)}; \\ &\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}; \quad (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}; \quad \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x - 1}; \\ &\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}; \quad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}. \end{aligned}$$

23. (Ede23) Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$\begin{aligned} &\text{en } \frac{\pi}{2} \text{ à gauche :} && \ln\left(\frac{2x}{\pi}\right) e^{\frac{1}{\cos x}}, \\ &\text{en } e : && \frac{\sin x - \sin e}{\ln x - 1}, \\ &\text{en } 2 : && \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{\frac{x}{2}}}\right)^{\frac{1}{2-x}}, \\ &\text{en } \frac{\pi}{6} : && \frac{\arctan(2\sin x) - \frac{\pi}{4}}{\cos 3x}, \\ &\text{en } \frac{\pi}{6} : && \left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\tan 3x} \end{aligned}$$

24. (Ede24) Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} &\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)}, \ \left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}, \\ &\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right)\right)^x, \ \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}, \\ &\frac{\left((x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right)(x\ln x)^2}{x^{x^{\frac{1}{x}}} - x}, \\ &((x+1)\cdots(x+n))^{\frac{1}{n}} - x, \ x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right), \\ &\ln^a(1+x) - \ln^a(x) \text{ avec } a > 0. \end{aligned}$$

25. (Ede25) Déterminer des fonctions simples équivalentes aux fonctions suivantes au point indiqué :

$$\begin{aligned} &\text{en } +\infty : (\operatorname{sh}(x+1))^a - (\operatorname{ch}(x+1))^a, \\ &\text{en } 0 : \exp\left(\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\cos x}\right)\right) - 1, \\ &\text{en } 0 : \sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x), \ \text{en } 0 : x^x - (\sin x)^{\sin x}, \\ &\text{en } +\infty : \left(\frac{\arctan(1+x)}{\arctan x}\right)^x - 1. \end{aligned}$$

26. (Ede26) Soient u et v des fonctions définies dans un voisinage de 0, à valeurs positives et qui convergent en 0 vers un réel $a > 0$. On suppose de plus que $u(x) \neq v(x)$ pour

tous les x en lesquels les fonctions sont définies. Calculer la limite en 0 de
$$\frac{u^v - v^u}{u-v}$$

27. (Ede27) On définit une nouvelle relation locale (en a) entre deux fonctions (continues et à valeurs strictement positives). On dit que f et g sont *de même ordre* en a si et seulement si $o(f) = o(g)$. C'est à dire qu'une fonction est négligeable devant l'une si et seulement si elle est négligeable devant l'autre.
    a. Montrer que deux fonctions qui se dominent mutuellement sont de même ordre.
    b. Soit h une fonction définie au voisinage de a à valeurs positives et non majorée au voisinage de a. Montrer qu'il existe des fonctions φ et ψ à valeurs positives, définies au voisinage de a et telles que
    $$h = \varphi\psi, \qquad \varphi \xrightarrow{a} +\infty, \qquad \psi \text{ ne tend pas vers 0 en } a$$
    c. Montrer que deux fonctions de même ordre se dominent mutuellement.
28. (Ede28) Soient f et g dérivables en 0 vérifiant $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$. Quelle est la limite en 0 de $f^{\frac{1}{g}}$?
29. (Ede29) Fonction génératrice de la suite de Fibonacci.
On désigne par $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Phi_{n+2} = \Phi_n + \Phi_{n+1}.$$
On suppose qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un intervalle ouvert contenant 0 et admettant à tous les ordres les développements
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k x^k + o(x^k).$$
    a. Former des developpements en 0 de
    $$xf(x), \qquad (x+1)f(x), \qquad \frac{f(x)-x}{x}.$$
    b. Quelle relation la fonction f doit-elle vérifier ?
    c. Conclure.
30. (Ede30) Calculer le coefficient de x^k dans un développement limité en 0 de $\cos^3 x$.
31. (Ede31) La fonction tan admet des développements limités à tous les ordres en 0 : on note a_k le coefficient de x^k. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

1. (Cde01)

$$3\sin 2x - 2\sin 3x = 5x^3 + O\left(x^5\right)$$
$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + O\left(x^5\right)$$
$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + O(x^4)$$
$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O\left(x^5\right)$$
$$\sqrt{1+\tan x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 - \frac{47}{384}x^4 + O\left(x^5\right)$$
$$\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + O\left(x^4\right)$$
$$\left(\tan x^2\right)^2 = x^4 + o\left(x^4\right)$$
$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}x - \frac{5}{64\sqrt{2}}x^2 + o(x^2)$$
$$\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^9 - \frac{1}{40}x^{10} + o(x^{10})$$

2. pas de correction pour Ede02.tex
3. (de03)

$$x\ln(x\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{x}) \xrightarrow{0^+} 1,\ \frac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(2x)} \xrightarrow{0} -\frac{9}{8},$$
$$\frac{\log_x a - \log_a x}{\mathrm{sh}\,x - \mathrm{sh}\,a} \xrightarrow{a} -\frac{2}{a\ln a\,\mathrm{ch}\,a},$$
$$\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} \xrightarrow{0} -1$$
$$e^{-x}\left(\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x} - \mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}\right) \xrightarrow{+\infty} \mathrm{sh}\,\frac{1}{2},$$
$$\frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} \xrightarrow{1^+} 0,\ \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}} \xrightarrow{1} -\frac{2e^2}{\pi},$$
$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} \xrightarrow{0} e^{\frac{2}{\pi}}.$$

4. pas de correction pour Ede04.tex
5. (Cde05) à compléter.
   Développement de la deuxième fonction :
$$f^{-1}(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5 + o(y^5).$$
6. pas de correction pour Ede06.tex
7. pas de correction pour Ede07.tex
8. pas de correction pour Ede08.tex
9. (Cde09) La restriction de $t \mapsto \tan t - t$ dans un intervalle
$$\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$$
définit une bijection strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique x_n dans cet intervalle tel que
$$\tan x_n = x_n.$$
De $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$ on déduit par encadrement $x_n \sim n\pi$.
On pose $b_n = x_n - n\pi$. Alors
$$-\frac{\pi}{2} < b_n < \frac{\pi}{2} \Rightarrow b_n = \arctan x_n.$$
Comme $(x_n) \to +\infty$, $(b_n) \to \frac{\pi}{2}$. On pose $c_n = b_n - \frac{\pi}{2}$. On sait que $(c_n) \to 0$ c'est à dire $c_n = o(1)$. On a obtenu le développement suivant
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + c_n \text{ avec } c_n \in o(1).$$
Pour tout $x > 0$, on a
$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$
On en déduit
$$\frac{\pi}{2} + c_n = b_n = \arctan x_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x_n}$$
$$\Rightarrow c_n = -\arctan\frac{1}{x_n} = -\arctan\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}.$$
On calcule le développement composé pour arctan :
$$\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)$$
$$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2}) = u.$$
$$\arctan u = u + o(u^2) \text{ avec } o(u) = o(\frac{1}{n^2})$$
$$\Rightarrow c_n = -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2}).$$
On a donc obtenu le développement
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2}).$$

10. (Cde10) Si $a_n = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$, on a
$$\ln(a_n) = \ln(1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})) = \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$$
$$\Rightarrow n\ln(a_n) \to a \Rightarrow a_n^n \to e^a$$
Réciproquement, si a_n^n converge, notons u sa limite. Alors :
$$n\ln a_n \to \ln u \Rightarrow \ln a_n = \frac{\ln u}{n} + o(\frac{1}{n})$$
$$\Rightarrow a_n = e^{\frac{\ln u}{n} + o(\frac{1}{n})} = 1 + \frac{\ln u}{n} + o(\frac{1}{n})$$

11. (Cde11) Notons
$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$$
D'après le développement en 0 de l'exponentielle à l'ordre 101 :
$$f(x) = \ln\left(e^x - \frac{x^{100}}{100!} - \frac{x^{101}}{101!} + o(x^{101})\right)$$
$$= x + \ln\left(1 - e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} - e^{-x}\frac{x^{101}}{101!} + o(x^{101})\right)$$

car $e^{-x} \to 1$ entraîne $o(e^{-x}x^{101}) = o(x^{101})$. De plus,

$$e^{-x}\frac{x^{101}}{101!} = \frac{x^{101}}{101!} + o(x^{101})$$
$$e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} = \frac{x^{100}}{100!} - \frac{x^{101}}{100!} + o(x^{101})$$

On en déduit

$$f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{x^{100}}{100!} + \frac{100\,x^{101}}{101!} + o(x^{101})\right)$$
$$= x - \frac{x^{100}}{100!} + \frac{100\,x^{101}}{101!} + o(x^{101})$$

12. (Cde12) On transforme par une intégration par parties

$$\int_1^x e^t \ln t\,dt = e^x \ln x - \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$$

On majore le reste car pour $t \geq 1$, $\frac{1}{t} \leq 1$:

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^t}{t}dt \leq \int_1^x e^t\,dt = e^x - e$$

Cela montre que ce reste est négligeable devant $e^x \ln x$ ce qui prouve l'équivalence demandée.

13. (Cde13) La démonstration ressemble beaucoup à celle du théorème de Césaro.

a. On pose $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. À cause de l'hypothèse de négligeabilité, cette fonction converge vers 0 en $+\infty$. On coupe alors $F(x)$ par la relation de Chasles en introduisant un A arbitraire, pour $x \geq A$,

$$F(x) = F(A) + \int_A^x \varphi(t)g(t)\,dt$$
$$\leq F(A) + (\sup_{[A,x]}\varphi)(G(x) - G(A))$$
$$\leq F(A) + (\sup_{[A,x]}\varphi)G(x)$$

On en déduit

$$0 \leq \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(A)}{G(x)} + \sup_{[A,x]}\varphi$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, comme $\varphi \to 0$, on peut fixer un A tel que $\sup_{[A,x]}\varphi \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour ce A fixé, comme $G \to +\infty$, il existe un B tel que $\frac{F(A)}{G(x)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geq B$. On a bien alors :

$$x \geq B \Rightarrow 0 \leq \frac{F(x)}{G(x)} \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve que F est négligeable devant G.

b. L'application repose sur la première question et des intégrations par parties. Il est clair que f_{k+1} est négligeable devant f_k et que $F_k(x) \to +\infty$ car

$$F_k(x) \geq \frac{e^x - e}{x^k}$$

Ce qui entraine que F_{k+1} est négligeable devant F_k. D'autre part, une intégration par parties conduit à

$$F_k(x) = \frac{e^x}{x^k} - e + kF_{k+1}(x)$$

En négligeant F_{k+1} devant F_k et e devant $\frac{e^x}{x^k}$, on tire

$$F_k(x) \sim \frac{e^x}{x^k}$$

En intégrant p fois par parties, on arrive à la formule :

$$F_1(x) = \frac{e^x}{x} + 1!\frac{e^x}{x^2} + 2!\frac{e^x}{x^3} + \cdots + (p-1)!\frac{e^x}{x^p}$$
$$+ p!F_{p+1}(x) + (1 + 1! + 2! + \cdots + (p-1)!)\,e$$

qui est un développement asymptotique.

14. (Cde14) Il n'est pas question d'exprimer la solution du problème de Cauchy pour l'équation différentielle proposée. Comme toute solution d'une telle équation est $\mathcal{C}^\infty$, elle admet un développement de Taylor à tous les ordres. On écrit des développements avec les hypothèses puis on utilise l'équation pour les améliorer en intégrant.

$$y'(x) = 1 + o(x)$$
$$y(x) = x + o(x^2)$$
$$x\sin x = x^2 + o(x^2)$$
$$y''(x) = x\sin x - y'(x) - y(x) = -1 - x + o(x)$$

On intégre et on recommence

$$y'(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$x\sin x = x^2 + o(x^2)$$
$$y''(x) = x\sin x - y'(x) - y(x) = -1 - x + 2x^2 + o(x^2)$$

On intègre encore

$$y'(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

15. (Cde15) On note

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2)\,dx$$

et on encadre

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx = \frac{\ln(2)}{n+1}$$

Ceci assure la convergence vers 0 par encadrement. Pour former un développement, on intègre par parties :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1 + x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^{n+2}}{(n+1)(1+x^2)}dx$$
$$= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx$$

On peut faire une deuxième intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x^{n+3}}{(n+3)(1+x^2)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^{n+4}}{(n+3)(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2(n+3)} + \frac{2}{n+3}\int_0^1 \frac{x^{n+4}}{(1+x^2)^2}\,dx$$

On en tire

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+3)} \underbrace{-\frac{4}{(n+1)(n+3)}\int_0^1 \frac{x^{n+4}}{(1+x^2)^2}\,dx}_{\in O(\frac{1}{n^3})}$$

par encadrement. Il s'agit bien d'un développement asymptotique.

16. (Cde16)
   a. Le développement limité de arctan en 0 s'obtient en intégrant celui de sa dérivée $\frac{1}{1+x^2}$, soit
   $$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^6)$$
   On en déduit des développements
   $$\arctan\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{x}^3 + \frac{1}{5}\sqrt{x}^5 + o(x^3)$$
   $$\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^2 + o(x^{\frac{5}{2}})$$
   $$\frac{1+x}{\sqrt{x}}\arctan\sqrt{x} = 1 + \frac{2}{3}x + (\frac{1}{5} - \frac{1}{3})x^2 + o(x^{\frac{5}{2}}) = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{15}x^2 + o(x^{\frac{5}{2}})$$
   On peut affaiblir en écrivant $o(x^2)$ pour avoir un véritable développement limité.
   b. Le développement montre que f converge vers 1 en 0. La fonction prolongée est dérivable en 0 car elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0. Sa dérivée en 0 vaut $\frac{2}{3}$.
   c. On sait que pour tous les x réels,
   $$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$
   Cette formule permet d'écrire les développements suivants car $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ quand $x \to \infty$.
   $$\begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}) \\ &= (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt{x}} + o(\frac{1}{x\sqrt{x}})) \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{x} - 1 + (\frac{1}{3} - 1)\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + o(\frac{1}{x}) \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{x} - 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3x} + o(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$
   La parabole $y = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} - 1$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$. le graphe est au dessus de la parabole à cause du terme $+\frac{\pi}{2\sqrt{x}}$.

17. pas de correction pour Ede17.tex
18. pas de correction pour Ede18.tex
19. pas de correction pour Ede19.tex
20. pas de correction pour Ede20.tex
21. (Cli05)$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n = e^{\frac{1}{24}\sqrt{3}\pi}$.
22. (Cde22) Limites en 0.
   $$\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} \to 1,\ \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)} \to -\frac{1}{2}$$
   $$(\cos x)^{\operatorname{cotan} x^2} \to e^{-\frac{1}{2}},\ \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x - 1} \to 1,$$
   $$(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} \to e^{\frac{1}{e}},\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \to 1,$$
   $$x^x \to 1,\ x^{x^x} \to 0,\ x^{x^{x^x}} \to 1,$$
   $$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \to 1,\ (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} \to e^{\frac{1}{e}},$$
   $$\frac{x^{x^x}\ln x}{x^x - 1} \to 1,\ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \to \frac{1}{3},$$
   $$\frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1} \to \frac{1}{3},\ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \to -\frac{e}{2}$$
23. (Cli07) Limites aux points indiqués.
   $$\begin{aligned} &\text{en } \frac{\pi}{2} \text{ à gauche :} && \ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)e^{\frac{1}{\cos x}} \to 0, \\ &\text{en } e : && \frac{\sin x - \sin e}{\ln x - 1} \to e\cos e, \\ &\text{en } 2 : && \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{\frac{x}{2}}}\right)^{\frac{1}{2-x}} \to 2^{\frac{4}{13}}3^{-\frac{9}{13}}5^{\frac{5}{26}}, \\ &\text{en } \frac{\pi}{6} : && \frac{\arctan(2\sin x) - \frac{\pi}{4}}{\cos 3x} \to -\frac{\sqrt{3}}{6}, \\ &\text{en } \frac{\pi}{6} : && \left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\tan 3x} \to \frac{1}{e}. \end{aligned}$$
24. (Cde24)
   $$\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)} \xrightarrow{+\infty} 0,$$
   $$\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} \xrightarrow{+\infty} e^{-\frac{1}{6}},\ \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right)\right)^x \xrightarrow{+\infty} e^2,$$
   $$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} \xrightarrow{+\infty} e$$
   $$\frac{\left((x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right)(x\ln x)^2}{x^{x^{\frac{1}{x}}} - x} \xrightarrow{+\infty} 1$$
   Pour la dernière fonction
   $$(x+1)\cdots(x+n) = x^n(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})\cdots(1+\frac{n}{x}) = x^n\left(1 + \frac{n(n+1)}{2x} + o(\frac{1}{x})\right)$$

On en déduit (car n est fixé)

$$\begin{aligned}
&((x+1)\cdots(x+n))^{\frac{1}{n}} \\
&\quad = x\left(1+\frac{n(n+1)}{2x}+o(\frac{1}{x})\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\qquad = x\left(1+\frac{(n+1)}{2x}+o(\frac{1}{x})\right)
\end{aligned}$$

La limite cherchée est donc $\frac{n+1}{2}$.

$$\begin{aligned}
&x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right) \rightarrow \text{à compléter}, \\
&\qquad \ln^a(1+x)-\ln^a(x) \rightarrow \text{à compléter } a>0.
\end{aligned}$$

25. (Cde25) à compléter

$$\text{en } +\infty : \left(\frac{\arctan(1+x)}{\arctan x}\right)^x - 1 \sim \frac{2}{\pi x}.$$

26. (Cde26) Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction exponentielle entre $v(x)\ln(u(x))$ et $u(x)\ln(v(x))$.
Il existe w_x entre ces deux nombres tel que

$$\begin{aligned}
&u(x)^{v(x)}-v(x)^{u(x)} \\
&\quad = e^{w_x}\left(v(x)\ln(u(x))-u(x)\ln(v(x))\right) \\
&\quad = e^{w_x}u(x)v(x)\left(\frac{\ln(u(x))}{u(x)}-\frac{\ln(v(x))}{v(x)}\right).
\end{aligned}$$

Appliquons le théorème des accroissements finis entre $u(x)$ et $v(x)$ à la fonction

$$t \mapsto \frac{\ln t}{t}$$

Il existe z_x entre ces deux nombres tel que

$$\begin{aligned}
&u(x)^{v(x)}-v(x)^{u(x)} \\
&\quad = e^{w_x}u(x)v(x)\frac{1-\ln(z_x)}{z_x^2}\left(u(x)-v(x)\right).
\end{aligned}$$

On peut alors simplifier $u(x)-v(x)$ et

$$\left.\begin{aligned}
u(x) \text{ et } v(x) &\rightarrow a \\
w_x &\rightarrow a\ln a \\
z_x &\rightarrow a
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u^v-v^u}{u-v}$$
$$\rightarrow e^{a\ln a}(1-\ln a) = a^a(1-\ln a).$$

27. (Cde27) à compléter
    a. Facile
    b. Pour fixer les idées, plaçons nous dans un intervalle $]a,b]$. Posons

    $$\forall x \in]a,b],\ \varphi(x) = \max_{[x,b]} f,\ \psi(x) = \frac{h(x)}{\varphi(x)}$$

    C'est possible car f est continue sur le segment $[x,b]$ donc bornée et atteignant ses bornes.
    c. On doit montrer

    $$o(f)=o(g) \Rightarrow f\in O(g) \text{ et } g\in O(f)$$

    On va prouver la contraposée. Supposons $f\notin O(g)$ et cherchons à montrer $o(f)\neq o(g)$. Soit $h=\frac{f}{g}$, elle n'est pas localement majorée en a. Considérons les fonctions φ et ψ de la question b.

    $$\frac{f}{g}=\varphi\psi \Rightarrow \frac{f}{\varphi}=\psi g$$

    Notons u cette fonction

    $$\begin{aligned}
    &\frac{1}{\varphi}\rightarrow 0 && \Rightarrow u\in o(f) \\
    &\psi \text{ ne converge pas vers } 0 && \Rightarrow u\notin o(g)
    \end{aligned}$$

28. pas de correction pour Ede28.tex
29. pas de correction pour Ede29.tex
30. (Cde30) On linéarise :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(\cos 3x - 3\cos x\right).$$

Notons c_k le coefficient de x^k. Si k est impair $c_k=0$. Si k est pair :

$$c_k = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{4}\left(\frac{3^k-3}{k!}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}}\frac{3^{k-1}}{2\,k!}.$$

31. pas de correction pour Ede31.tex