1. (Edi01) Soit A, B deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, montrer la formule de Grassmann en utilisant l'application
$$\Phi : \begin{cases} A \times B \to E \\ (a, b) \mapsto a + b \end{cases}$$
2. (Edi02) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ si et seulement si $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $2\operatorname{rg}(f) = \dim E$.
3. (Edi03) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de E.
   a. Montrer que l'application *restriction*
   $$\begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(A, E) \\ f \mapsto f_{|A} \end{cases}$$
   est linéaire et surjective.
   b. Montrer que $\{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } A \subset \ker f\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$. Quelle est sa dimension ? Voir exercices 27 et 28.
4. (Edi04) Soit $a \in \mathbf{K}$, on définit une application f dans $\mathbf{K}_n[X]$ par :
$$f(P) = (X - a)(P' + \widetilde{P'}(a)) - 2(P - \widetilde{P}(a))$$
Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}_n[X])$, calculer $f((X - a)^k)$, déterminer l'image et le noyau de f.
5. (Edi05) Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous-espaces vectoriels de E tels que
$$\dim A + \dim B = \dim E$$
En utilisant l'existence de bases, le théorème de la base incomplète et le théorème de prolongement linéaire, fabriquer un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = A$ et $\operatorname{Im} f = B$. Malgré la relation entre les dimensions, le noyau et l'image d'un endomorphisme ne sont pas supplémentaires en général.
6. (Edi06) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.
   a. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ une base de E^* et Φ définie par :
   $$\Phi : \begin{cases} E \to \mathbf{K}^n \\ x \to (\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)) \end{cases}$$
   Montrer que Φ est un isomorphisme.
   b. Base antéduale.
   Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(a_1, \cdots, a_n)$ de E dont la famille des formes coordonnées est $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. On dit que $(a_1, \cdots, a_n)$ est *antéduale* de $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.
   c. Multiplicateurs de Lagrange.
   Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ une famille de vecteurs de E^* et $\alpha \in E^*$. Montrer que
   $$\ker(\alpha_1) \cap \cdots \cap \ker(\alpha_p) \subset \ker(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{Vect}(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$$
   d. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ une famille de vecteurs de E^*. Montrer que
   $$(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \text{ libre} \Leftrightarrow \dim(\ker \alpha_1 \cap \cdots \cap \ker \alpha_p) = \dim E - p$$
   On considèrera une base $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de E^* et des applications
   $$\Phi_n : \begin{cases} E \to \mathbf{K}^n \\ x \to (\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)) \end{cases}$$
   $$\Phi_p : \begin{cases} E \to \mathbf{K}^p \\ x \to (\alpha_1(x), \cdots, \alpha_p(x)) \end{cases}$$
7. (Edi07) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E et $x_0 \in E$ tels que
$$(x_0, u(x_0), u^2(x_0)) \text{ base de } E$$
   a. Montrer que si on se donne un vecteur x_0 non nul, il existe bien des endomorphismes u vérifiant la propriété.
   b. Montrer qu'il existe des nombres complexes a, b, c tels que
   $$u^3 = au^2 + bu + c \operatorname{Id}_E$$
   c. Montrer que u est un automorphisme si et seulement si $c \neq 0$.
8. (Edi08) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On pose, pour tout entier k, $N_k = \ker f^k$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.
Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$. Montrer que si pour un certain k, $I_k = I_{k+1}$, alors $N_k = N_{k+1}$ et $I_{k+1} = I_{k+2}$. Montrer l'existence d'un entier r tel que, pour tout $k \geq r$,
$$N_k = N_r \quad I_k = I_r \quad N_r \text{ et } I_r \text{ sont supplémentaires}$$
9. (Edi09) Preuve du théorème de prolongement linéaire.
Soit $(a_1, \cdots, a_p)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ la famille des formes coordonnées dans cette base. Soit $(y_1, \cdots, y_p)$ une famille de vecteurs dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F.
   a. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(a_i) = y_i$ pour i de 1 à p. Pour tout $x \in E$, exprimer $f(x)$ à l'aide des y_i et des $\alpha_i(x)$. Que peut-on en déduire quant au théorème de prolongement linéaire.
   b. Achever la démonstration du théorème.
10. (Edi10) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et a, b, c trois réels distincts. On considère les formes linéaires ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ψ définies sur E par :
$$\phi_1(P) = \widetilde{P}(a) \qquad \phi_2(P) = \widetilde{P}(b)$$
$$\phi_3(P) = \widetilde{P}(c) \qquad \psi(P) = \int_a^b \widetilde{P}(t)\,dt$$
Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est libre.
Montrer que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi)$ est liée si et seulement si
$$\psi((X - a)(X - b)(X - c)) = 0$$

En déduire que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi)$ est liée si et seulement si $c = \frac{a+b}{2}$. (on pourra poser $m = \frac{a+b}{2}$, $l = \frac{b-a}{2}$ et exprimer la polynôme à intégrer avec des puissances de $X - m$.

11. (Edi11) Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \ker f^2 = \ker f.$$

12. (Edi12) Soit E, F, G de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que
$$\ker g = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \begin{cases} g \circ f = 0 \\ \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim F. \end{cases}$$

13. (Edi13) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
   a. On suppose $\operatorname{rg} f = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in E^*$, $a \in E$ tels que (α) libre, (a) libre et
   $$\forall x \in E,\ f(x) = \alpha(x)a.$$
   b. On suppose $\operatorname{rg} f = 2$. Montrer qu'il existe α et β dans E^*, a et b dans E tels que (α, β) libre, (a,b) libre et
   $$\forall x \in E,\ f(x) = \alpha(x)a + \beta(x)b.$$

14. (Edi14) Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie.
   a. Soient f et g deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f. La dimension finie est-elle utile dans cette question ?
   b. Soit x un vecteur non nul. Fabriquer un endomorphisme g tel que $\ker g = \operatorname{Vect}(x)$. Fabriquer un endomorphisme h tel que $\operatorname{Im} h = \operatorname{Vect}(x)$. Comment intervient la dimension finie ici ?
   c. Montrer en utilisant l'exercice di07 (feuille Espaces vectoriels sans dimension que si un endomorphisme f commute avec tous les endomorphismes alors il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda Id_E$.

15. (Edi15) Soit a complexe non nul, on définit
$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + a\overline{z} \end{cases}$$
On munit $\mathbb{C}$ de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que f est linéaire. Étudier son noyau et son image.

16. (Edi16) Soit E de dimension n, $1 \leq p < n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = p$ si et seulement si il existe $(a_1, \cdots, a_p)$ libre dans E et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ libre dans E^* telles que
$$\forall x \in E,\ f(x) = \alpha_1(x)a_1 + \cdots + \alpha_p(x)a_p$$

17. (Edi17) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f linéaire de E dans F. Soit $(x_1, \cdots, x_l)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que
$$\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_l) = \operatorname{rg}(f(x_1), \cdots, f(x_l)) \Leftrightarrow f_{| \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_l)} \text{ injective}$$

18. (Edi18) Soient E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que
$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g)$$

19. (Edi19) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\dim(\ker f^2) \leq 2 \dim(\ker f)$$

20. (Edi20) Soit α et β deux éléments distincts d'un corps $\mathbf{K}$. Montrer que l'application
$$P \to \widehat{P}(X - \alpha) + \widehat{P}(X - \beta)$$
est un automorphisme (de $\mathbf{K}$ espace vectoriel) de $\mathbf{K}[X]$.

21. (Edi21) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes non nuls de E tels que
$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E, \qquad \ker f + \ker g = E$$
Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires. Montrer que $\ker f$ et $\ker g$ sont supplémentaires. Former deux endomorphismes f et g de $\mathbb{R}[X]$ tels que
$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \mathbb{R}[X] = \ker f + \ker g$$
sans que les espaces soient supplémentaires.

22. (Edi22) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g = \operatorname{Id}_E$ et $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq \dim E$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

23. (Edi23) (base usuelle de $\mathcal{L}(E,F)$: démonstration)
Soit $(a_1, \cdots, a_p)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ la famille des formes coordonnées dans cette base. Soit $(b_1, \cdots, b_q)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F et $(\beta_1, \cdots, \beta_q)$ la famille des formes coordonnées dans cette base.
Pour tout couple $(i,j) \in \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, q\}$, on définit $f_{i,j}$ par le théorème du prolongement linéaire avec
$$\forall k \in \{1, \cdots, p\},\ f_{i,j}(a_k) = \delta_{ik} b_j$$
Soit $\lambda_{i,j}$ avec $(i,j) \in \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, q\}$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$ et
$$l = \sum_{(i,j) \in \{1,\cdots,p\} \times \{1,\cdots,q\}} \lambda_{i,j} f_{i,j}$$
Exprimer $\lambda_{i,j}$ en fonction des a_i, α_i, b_j, β_j. Démontrer que les $f_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

24. (Edi24) Commutant d'un endomorphisme cyclique.
Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension p et f un endomorphisme de E *cyclique* c'est à dire qu'il existe $u \in E$ tel que
$$\left(u, f(u), \cdots, f^{p-1}(u)\right)$$
est une base de E. Soit g un endomorphisme dans le *commutant* de f c'est à dire tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $a_0, \cdots, a_{p-1}$ dans $\mathbf{K}$ tels que
$$g = a_0 \operatorname*{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}$$

25. (Edi25) Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f, g dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $\operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f)$ si et seulement si il existe $h \in GL(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$.

26. (Edi26) Dualité.
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note
$$F^{\perp} = \{\varphi \in E^* \text{ tq } F \subset \ker \varphi\}$$
Montrer que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E^*. Déterminer $E^{\perp}$, $\{0_E\}^{\perp}$. Montrer que
$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$$
On pourra considérer l'application *restriction*
$$\begin{cases} E^* \to F^* \\ \alpha \mapsto \alpha_{|A} \end{cases}$$

27. (Edi27) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   a. Soit A un sous-espace de E. Montrer que
   $$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tels que } \operatorname{Im} f \subset A\}$$
   est isomorphe à $\mathcal{L}(E,A)$.
   b. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ fixé. On définit la fonction γ par :
   $$\gamma : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ f \mapsto a \circ f \end{cases}$$
   Montrer que γ est linéaire, préciser son noyau, son image et leurs dimensions.

28. (Edi28) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   a. Soit A un sous-espace de E et B un supplémentaire de A. Montrer que
   $$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } A \subset \ker f\}$$
   est isomorphe à $\mathcal{L}(B,E)$. En déduire sa dimension.
   b. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ fixé. On définit la fonction δ par :
   $$\delta : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ f \mapsto f \circ a \end{cases}$$
   Montrer que δ est linéaire, préciser son noyau, son image et leurs dimensions.

29. (Edi29) Dans $E = \mathbb{R}^5$, la base canonique est notée (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5)$ la base duale des formes coordonnées dans la base canonique. Soit
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \\ \alpha_2 &= 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5 \\ \alpha_3 &= -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4 + 2\varepsilon_5 \end{aligned}$$
et $A = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2 \cap \ker \alpha_3$. Soit
$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in E.$$
Caractériser $x \in A$. Former une base de E. Les vecteurs seront exprimés dans la base canonique.
Mêmes questions avec $A = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$ et
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_5 \\ \alpha_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

30. (Edi30) Dans $E = \mathbb{R}^5$, on se donne les vecteurs suivants
$$\begin{aligned} u_1 &= (1,2,-1,-1,0) \\ u_2 &= (1,1,1,0,-1) \\ u_3 &= (-2,1,0,1,2) \\ a_1 &= (1,1,-1,0,1) \\ a_2 &= (0,1,1,-1,0) \\ a_3 &= (1,0,1,1,-1) \\ a_4 &= (2,2,1,0,0) \end{aligned}$$
et $U = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, $A = \operatorname{Vect}(a_1,a_2,a_3,a_4)$.
Exprimer U et A comme des intersections d'hyperplans. Les formes linéaires définissant ces hyperplans seront données dans la base duale de la base canonique notée $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5)$.

31. (Edi31) à remplacer

32. (Edi32) On considère l'application
$$\begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto \widehat{P}(X+1) + \widehat{P}(X-1) - 2P \end{cases}$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$.
   a. Montrer que la restriction à E de cette application définit un endomorphisme de E.
   b. Pour $p \in [\![0,n]\!]$, calculer $f(X^p)$. En déduire l'image, le rang et le noyau de f.
   c. Montrer que pour tout $Q \in \operatorname{Im} f$, il existe un unique $P \in E$ tel que
   $$f(P) = Q, \qquad \widetilde{P}(0) = \widetilde{P'}(0) = 0$$

33. (Edi33) On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit A et B dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$. On définit une fonction f :
$$\begin{cases} E \to E \\ P \mapsto \text{ reste de la division de } AP \text{ par } B \end{cases}$$
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que
$$f \text{ automorphisme } \Leftrightarrow A \wedge B = 1$$

34. (Edi34) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit f un endomorphisme de E pour lequel il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
   a. Montrer qu'il existe $u \in E$ et $\varphi \in E^*$ tels que
   $$f^{p-1}(u) \neq 0_E \text{ et } \varphi \circ f^{p-1} \neq O_{E^*}.$$
   b. Montrer que les sous-espaces U et V :
   $$\begin{aligned} U &= \operatorname{Vect}(u, f(u), \cdots, f^{p-1}(u)) \\ V &= (\ker \varphi) \cap (\ker \varphi \circ f) \cap \cdots \cap (\ker \varphi \circ f^{p-1}) \end{aligned}$$
   sont supplémentaires. On pourra utiliser le résultat (hors programme) sur la dimension de l'intersection d'une famille d'hyperplans.

35. (Edi35) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $n+1$ espaces vectoriels de dimension finie et n applications linéaires

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots E_n \xrightarrow{f_n} E_{n+1}$$

On suppose que $\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i+1}$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ avec f_0 injective et f_n surjective. Que vaut

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \dim E_j \ ?$$

36. (Edi36) Soit E de dimension finie. Montrer que

$$\dim E \text{ paire} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} f = \ker f$$

37. (Edi37) Soit E et F de dimension finie et f, g dans $\mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f+g)$$

$$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} E = \ker f + \ker g \\ \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0_F\} \end{cases}$$

38. (Edi38) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et f, g dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer, en considérant la restriction de g à $\ker(f \circ g)$, que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg} f \circ g \leq \inf(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

39. (Edi39) Soit E de dimension finie et f, g dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\left.\begin{matrix} f + g \in Gl(E) \\ f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$

1. (Cdi01) On vérifie facilement que Φ est linéaire et que son image est $A + B$. Son noyau est formé par les couples $(a, b) \in A \times B$ tels que

$$a + b = 0_E \Rightarrow a = -b \in A \cap B$$
$$\text{d'où} \quad \ker \Phi = \{(x, -x), x \in A \cap B\}.$$

L'application de $A \cap B$ dans $\ker \Phi$ qui à x associe $(x, -x)$ est clairement un isomorphisme. On en déduit l'égalité des dimensions. Par le théorème du rang :

$$\dim(A \times B) = \dim \ker \Phi + \operatorname{rg} \Phi$$
$$\Leftrightarrow \dim A + \dim B = \dim(A \cap B) + \dim(A + B).$$

2. pas de correction pour Edi02.tex
3. pas de correction pour Edi03.tex
4. (Cdi04) La linéarité de f découle de celle de la dérivation et de la prise de valeur en a. Comme $\deg f(P) \leq \deg P$, la fonction est bien un endomorphisme. par un calcul immédiat :

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ f((X - a)^k) = (k - 2)(X - a)^k$$

car a est racine au moins double. De plus

$$f(1) = 0 \qquad f(X - a) = 0$$

On en déduit que $1, X - a$ et $(X - a)^2$ sont dans le noyau donc

$$\operatorname{Vect}(1, X - a, (X - a)^2) \subset \ker f$$

et les $(X - a)^k$ pour $k \geq 3$ sont dans l'image :

$$\operatorname{Vect}\left((X - a)^3, \cdots, (X - a)^n\right) \subset \operatorname{Im} f$$

Comme les familles de vecteurs sont libres :

$$\dim \ker f \geq 3, \qquad \dim \operatorname{Im} f \geq n - 2$$

À cause du théorème du rang

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n + 1$$
$$\Rightarrow \dim \ker f \geq n + 1 - (n - 2) = 3$$
$$\Rightarrow \ker f = \operatorname{Vect}(1, X - a, (X - a)^2)$$

De même pour l'image.

$$\operatorname{Vect}\left((X - a)^3, \cdots, (X - a)^n\right) = \operatorname{Im} f$$

5. (Cdi05) Il faut bien noter ici que A et B *ne sont pas supplémentaires*. On considère deux bases :

$$(a_1, \cdots, a_\alpha) \text{ base de } A, \qquad (b_1, \cdots, b_\beta) \text{ base de } B$$

avec $\alpha + \beta = n = \dim E$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $u_1, \cdots, u_\beta$ tels que

$$(a_1, \cdots, a_\alpha, u_1, \cdots, u_\beta) \text{ base de } E$$

On définit f par prolongement linéaire :

$$\forall i \in [\![1, \alpha]\!],\ f(a_i) = 0_E, \qquad \forall i \in [\![1, \beta]\!],\ f(u_i) = b_i$$

On vérifie facilement que $\ker f = A$ et $\operatorname{Im} f = B$.

6. (Cdi06)
   a. La fonction est clairement linéaire et son noyau est

   $$\ker(\alpha_1) \cap \cdots \cap \ker(\alpha_n)$$

   Soit x dans ce noyau. Alors $\alpha(x) = 0$ pour toute forme linéaire α car α est une combinaison linéaire des α_i. En considérant pour α les formes coordonnées dans une base, on prouve que toutes les coordonnées de x dans une base sont nulles donc $x = 0_E$. L'application Φ est injective donc bijective car c'est un endomorphisme en dimension finie.

   b. On utilise l'isomorphisme de la question précédente. On définit $(a_1, \cdots, a_n)$ comme les antécédents des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

   c. On vérifie facilement que

   $$\alpha \in \operatorname{Vect}(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$$
   $$\Rightarrow \ker(\alpha_1) \cap \cdots \cap \ker(\alpha_p) \subset \ker(\alpha).$$

   Pour la réciproque, on peut supposer que la famille est libre. En effet, si elle ne l'est pas, on extrait une sous-famille libre qui engendre le même sous-espace et on raisonne avec celle-ci.
   On complète en une base de E^*

   $$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

   et on utilise la base antéduale de la question b.

   $$(a_1, \cdots, a_n)$$

   Considérons la forme linéaire

   $$\varphi = \alpha - \alpha(a_1)\alpha_1 - \cdots - \alpha(a_p)\alpha(p)$$

   La forme φ est nulle car $\varphi(a_i) = 0$ pour tous les i entre 1 et n (les raisons sont différentes selon $i \leq p$ ou $i > p$).

   d. Supposons

   $$\dim(\ker \alpha_1 \cap \cdots \cap \ker \alpha_p) = \dim E - p$$

   Le théorème du rang appliqué à Φ_p montre que Φ_p est surjective. Il existe alors des antécédents $a_1, \cdots, a_p$ aux vecteurs de la base canonique. Ils permettent de montrer que la famille est libre.
   Supposons la famille libre ; on la complète en une base. La fonction Φ_n est alors surjective ce qui entraine que Φ_p est surjective. On obtient la dimension avec le théorème du rang appliqué à Φ_p.

7. pas de correction pour Edi07.tex
8. pas de correction pour Edi08.tex
9. pas de correction pour Edi09.tex
10. (Cdi10) On considère, dans $\mathbb{R}_3[X]$, les trois polynômes de Lagrange

$$L_a = \frac{(X - b)(X - c)}{(a - b)(a - c)},\ L_b = \frac{(X - a)(X - c)}{(b - a)(b - c)},$$
$$L_c = \frac{(X - a)(X - b)}{(c - a)(c - B)}$$

et une combinaison nulle des trois formes linéaires.

$$\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3$$

En prenant la valeur de cette fonction en L_a, L_b, L_c, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.
Notons $M = (X-a)(X-b)(X-c)$. La famille (L_a, L_b, L_c) est libre (prendre les valeurs en a, b, c). Le polynôme M n'est pas combinaison des L_a, L_b, L_c (considérer le degré). La famille (L_a, L_b, L_c, M) est donc libre dans un espace de dimension 4, c'est une base.
Comme (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est libre :

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi) \text{ liée } \Leftrightarrow \phi \in \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

Définissons une forme φ :

$$\varphi = \phi(L_a)\phi_1 + \phi(L_b)\phi_2 + \phi(L_c)\phi_3$$

Par construction : L_a, L_b, L_c sont dans $\ker(\phi - \varphi)$. On en déduit (prolongement linéaire) :

$$\varphi = \phi \Leftrightarrow \varphi(M) = \phi(M) \Leftrightarrow \phi(M) = 0$$

Avec les notations préconisées par l'énoncé,

$$a = m - l, \qquad b = m + l, \qquad c = m + (c - m)$$

d'où, après développement,

$$M = (X-m)^3 - l^2(X-m) + l^2(c-m)$$

Les puissances impaires disparaissent par symétrie

$$\psi(M) = l^2(c-m)(b-a)$$

11. pas de correction pour Edi11.tex
12. pas de correction pour Edi12.tex
13. (Cdi13) à remplacer
14. pas de correction pour Edi14.tex
15. (Cdi15) La linéarité est facile :

$$\begin{aligned}
&\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\\
&f(z+z') = z + z' + a\,\overline{(z+z')} = z + a\,\overline{z} + z' + a\,\overline{z'}\\
&\qquad = f(z) + f(z')\\
&f(\lambda z) = \lambda z + a\,\overline{\lambda z} = \lambda(z + a\,\overline{z}) = \lambda f(z).
\end{aligned}$$

Si $\ker f \neq \{0_\mathbb{C}\}$, il existe $z \neq 0$ tel que

$$z + a\overline{z} = 0 \Rightarrow a = -\frac{z}{\overline{z}} \Rightarrow |a| = 1.$$

On en déduit que si a n'est pas de module 1, f est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Si $a = e^{i\alpha}$, son image et son noyau sont des droites :

$$\ker f = \operatorname{Vect}(e^{i\frac{\alpha+\pi}{2}}), \qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e^{i\frac{\alpha}{2}}).$$

16. (Cdi16) Supposons $\operatorname{rg}(f) = p$.
Il existe une base $(a_1, \cdots, a_p)$ de $\operatorname{Im}(f)$. On la complète en une base $(a_1, \cdots, a_n)$ de E. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la base duale des formes coordonnées. Pour tout $x \in E$, $f(x)$ se décompose mais seulement sur les premiers vecteurs

$$\forall x \in E,\ f(x) = \alpha_1(x)a_1 + \cdots + \alpha_p(x)a_p + 0_E.$$

La famille $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ extraite d'une base est libre.
Réciproquement, supposons que

$$\forall x \in E,\ f(x) = \alpha_1(x)a_1 + \cdots + \alpha_p(x)a_p + 0_E$$
$$\text{avec } \begin{cases} (a_1, \cdots, a_p) \text{ libre dans } E \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \text{ libre dans } E^* \end{cases}.$$

Alors $\ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_p \subset \ker(f)$.
Comme $(a_1, \cdots, a_p)$ est libre ; pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
x \in \ker(f) &\Rightarrow \alpha_1(a)a_1 + \cdots + \alpha_p(x)a_p = 0_E\\
&\Rightarrow \alpha_1(x) = \cdots = \alpha_p(x) = 0_K\\
&\Rightarrow x \in \ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_p.
\end{aligned}$$

Donc $\ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_p = \ker(f)$.
D'après le résultat hors programme (ex. 6) sur la dimension de l'intersection d'une famille d'hyperplans et le théorème du rang,

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \text{ libre } &\Rightarrow \dim\ker(f) = n - p\\
&\Rightarrow \operatorname{rg}(f) = p.
\end{aligned}$$

17. pas de correction pour Edi17.tex
18. (Cdi18) Appliquons le théorème du rang à

$$g_{|\operatorname{Im}(f)} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im}(f), G)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(f) &= \dim(\operatorname{Im}(f))\\
&= \dim(\ker(g_{|\operatorname{Im}(f)})) + \dim(\operatorname{Im}(g_{|\operatorname{Im}(f)}))
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\ker(g_{|\operatorname{Im}(f)}) &= \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)\\
\operatorname{Im}(g_{|\operatorname{Im}(f)}) &= \operatorname{Im}(g \circ f)
\end{aligned}$$

19. pas de correction pour Edi19.tex
20. (Cdi20) L'application est clairement linéaire et conserve le degré. Considérons d'abord la restriction à l'espace $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. L'image d'une base formée de polynômes de degrés échelonnés est une famille de polynômes de degré échelonnés donc libre dans le même espace. C'est donc une base ce qui assure que chaque restriction est surjective. L'application complète est donc elle même surjective.
21. (Cdi21) Écrivons les formules donnant la dimension pour chaque somme puis additionnons en utilisant la formule du rang :

$$\begin{gathered}
\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f) \cap (\operatorname{Im} g) = \dim E\\
\dim\ker f + \dim\ker g - \dim(\ker f) \cap (\ker g) = \dim E\\
\Rightarrow 2\dim E - \dim(\operatorname{Im} f) \cap (\operatorname{Im} g) - \dim(\ker f) \cap (\ker g)\\
= 2\dim E\\
\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) \cap (\operatorname{Im} g) + \dim(\ker f) \cap (\ker g) = 0\\
\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) \cap (\operatorname{Im} g) = \dim(\ker f) \cap (\ker g) = 0
\end{gathered}$$

On en déduit que les deux sommes sont directes.
On définit f et g par :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P',\ g(P) = \widetilde{P}(0)$$
alors
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \mathbb{R}[X], & \ker f &= \mathbb{R}_0[X] \\ \operatorname{Im} g &= \mathbb{R}_0[X], & \ker g &= X\mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

22. (Cdi22) Soit x dans $\ker f$, alors $x = (f+g)(x) = g(x)$ donc $\ker f \subset \operatorname{Im} g$. D'autre part, l'inégalité avec les rangs s'écrit aussi $\operatorname{rg} g \leq \dim E - \operatorname{rg} f = \dim \ker f$ d'après le théormème du rang. De $\ker f \subset \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{rg} g \leq \dim \ker f$, on tire l'égalité des espaces $\ker f = \operatorname{Im} g$. Ceci entraine que $f \circ g$ est l'endomorphisme nul. On peut donc composer la somme à gauche par f :
$$f = f \circ (f+g) = f \circ f + f \circ g = f \circ f$$
ce qui assure que f est une projection.

23. pas de correction pour Edi23.tex

24. (Cdi24) Il existe $a_0, \cdots, a_{p-1}$ tels que
$$g(u) = a_0 u + a_1 f(u) + \cdots a_{p-1} f^{p-1}(u)$$
Définissons un endomorphisme h :
$$h = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots a_{p-1} f^{p-1}$$
Par définition, il commute avec f et coïncide avec g sur u. De plus,
$$g(f(u)) = f(g(u)) = f(h(u)) = h(f(u))$$
Il coïncide donc avec g sur le deuxième vecteur de base. On vérifie de même qu'il coïncide pour les autres vecteurs de base.

25. (Cdi25) Un sens est facile :
$$h \circ g = f \circ k$$
avec h bijectif entraine
$$\operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(h \circ g) = \operatorname{rg}(f \circ k) \leq \operatorname{rg}(f).$$
Réciproquement, supposons $\operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f)$.
Soit $(g_1, \cdots, g_p)$ une base de $\operatorname{Im}(g)$ que l'on complète en une base $(g_1, \cdots, g_n)$ de F et $(f_1, \cdots, f_q)$ une base de $\operatorname{Im}(f)$ que l'on complète en une base $(f_1, \cdots, f_n)$ de F. On définit $h \in GL(F)$ par :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ h(g_i) = f_i.$$
C'est une bijection car l'image d'une base particulière est une base. Il existe aussi des familles libres de E
$$(e_1, \cdots, e_p) \text{ et } (e'_1, \cdots, e'_q)$$
telles que
$$\begin{aligned} &\forall i \in [\![1, p]\!], & g(e_i) &= g_i \\ &\forall i \in [\![1, q]\!], & f(e'_i) &= f_i \end{aligned}$$
Considérons une base $(e_{p+1}, \cdots, e_m)$ de $\ker g$. D'après le lemme noyau-image, $(e_1, \cdots, e_m)$ est une base de E. On définit k en posant
$$\begin{aligned} &k(e_1) = e'_1, \cdots, k(e_p) = e'_p, \\ &\qquad k(e_{p+1}) = \cdots = k(e_m) = 0 \end{aligned}$$
Alors, par $h \circ g$:
$$\begin{gathered} e_1 \rightarrow g_1 \rightarrow f_1 \\ \vdots \rightarrow \vdots \rightarrow \vdots \\ e_p \rightarrow g_p \rightarrow f_p \\ e_{p+1} \rightarrow 0_F \rightarrow 0_F \\ \vdots \rightarrow \vdots \rightarrow \vdots \\ e_m \rightarrow 0_F \rightarrow 0_F \end{gathered}$$
et, par $f \circ k$:
$$\begin{gathered} e_1 \rightarrow e'_1 \rightarrow f_1 \\ \vdots \rightarrow \vdots \rightarrow \vdots \\ e_p \rightarrow e'_p \rightarrow f_p \\ e_{p+1} \rightarrow 0_F \rightarrow 0_F \\ \vdots \rightarrow \vdots \rightarrow \vdots \\ e_m \rightarrow 0_F \rightarrow 0_F \end{gathered}$$

26. (Cdi26) Considérer l'application restriction à F de E^* dans F^*.

27. (Cdi27) à compléter

28. (Cdi28)
   a. On vérifie que
$$\begin{cases} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(B, E) \\ f \mapsto f_{|B} \end{cases}$$
   est un isomorphisme. On en déduit
$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A} &= \dim(B) \dim(E) \\ &= (\dim(E) - \dim(A)) \dim(E). \end{aligned}$$
   b. La linéarité est immédiate car toutes les fonctions en jeu sont linéaires. D'autre part, il est clair que
$$\begin{aligned} &\{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} a \subset \ker f\} = \ker \delta \\ &\qquad \operatorname{Im}(\delta) \subset \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \ker a \subset \ker g\}. \end{aligned}$$
   D'après la question a.
$$\begin{aligned} &\dim(\ker \delta) = \dim(\ker a) \dim E, \\ &\dim \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \ker a \subset \ker g\} = \operatorname{rg} a \dim E \end{aligned}$$
   Or, d'après le théorème du rang
$$\begin{aligned} &\dim(\ker \delta) + \dim(\operatorname{Im}(\delta)) = \dim(E)^2 \\ &\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(\delta)) = \dim(E)^2 - \dim(\ker a) \dim E \\ &\qquad = \operatorname{rg} a \dim E. \end{aligned}$$
   On en déduit
$$\operatorname{Im}(\delta) = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \ker a \subset \ker g\}.$$

29. pas de correction pour Edi29.tex
30. pas de correction pour Edi30.tex
31. pas de correction pour Edi31.tex
32. pas de correction pour Edi32.tex
33. pas de correction pour Edi33.tex
34. pas de correction pour Edi34.tex
35. pas de correction pour Edi35.tex
36. pas de correction pour Edi36.tex
37. (Cdi37) Pour majorer la valeur absolue, écrivons

$$\begin{aligned} f = (f+g) - g \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f+g) + \mathrm{Im}(g) \\ \Rightarrow \mathrm{rg}(f) \leq \dim\left(\mathrm{Im}(f+g) + \mathrm{Im}(g)\right) \\ \leq \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(g) \end{aligned}$$

On en déduit une première inégalité, on obtient l'autre en échangeant les rôles de f et g.
Supposons
$$\begin{cases} E = \ker f + \ker g \\ \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_F\} \end{cases}$$
Montrons
$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f+g)$$
En effet, pour tout $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, il existe x_f et x_g tels que
$$y = f(x_f) + g(x_g)$$
Chacun se décompose dans la somme de noyau et seul « l'autre » noyau contribue. Il existe $a \in \ker(g)$ et $b \in \ker(f)$ tels que
$$y = f(a) + g(b) = (f+g)(a+b)$$
car $f(b) = g(a) = 0$.
On en déduit
$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f+g)$$
car l'autre inclusion est évidente puis
$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f+g)$$
car la somme est directe d'après la deuxième hypothèse.
Supposons
$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$
Alors, d'après le théorème du rang
$$\begin{aligned} &\dim(E) - \dim\left(\ker(f+g)\right) \\ &\quad = 2\dim(E) - \dim(\ker(f)) - \dim(\ker(g)) \\ &\quad \Rightarrow \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) \\ &\quad = \dim(E) + \dim\left(\ker(f+g)\right) \\ &\quad \Rightarrow \dim\left(\ker(f) + \ker(g)\right) = \dim(E) \\ &\quad + \underbrace{\dim\left(\ker(f+g)\right) - \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right)}_{\geq 0} \end{aligned}$$
On en déduit $\ker(f) + \ker(g) = E$ et $\ker(f+g) = \ker(f) \cap \ker(g)$.

Il reste à montrer que l'intersection des images se réduit au vecteur nul. Or
$$\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$$
avec
$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(f+g)) &\leq \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \\ &\leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) \end{aligned}$$
On en déduit $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et
$$\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$$
ce qui entraine que les images sont en somme directe.

38. pas de correction pour Edi38.tex
39. (Cdi39) De $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on tire

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, g \subset \ker f &\Rightarrow \mathrm{rg}\, g \leq \dim E - \mathrm{rg}\, f \\ &\Rightarrow \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \leq \dim E. \end{aligned}$$

avec le théorème du rang appliqué à f. De $f+g$ bijective, on tire

$$\begin{aligned} \dim E = \mathrm{rg}(f+g) &= \dim \mathrm{Im}(f+g) \\ &\leq \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g. \end{aligned}$$

D'où l'égalité.