1. (Edt01) Calculer, sous forme factorisée, le déterminant de VanderMonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2. (Edt02) Calculer et factoriser les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} b+c & bc-1 & (b^2+1)(c^2+1) \\ c+a & ca-1 & (c^2+1)(a^2+1) \\ a+b & ab-1 & (a^2+1)(b^2+1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

3. (Edt03) On note δ_n le déterminant de la matrice d'ordre n dont le terme d'indice i, j est :

$$\begin{cases} a & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

Montrer que la suite des δ_n vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Comment doit-on définir δ_0 et δ_1 pour que la relation soit valable dès l'ordre 0 ? En déduire une expression de δ_n lorsque $a = 2\operatorname{ch}\theta$ ou $2\cos\theta$ avec $|a| \neq 2$.

4. (Edt04) Calculer les déterminants d'ordre n

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & x+n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. (Edt05) Calculer les déterminants des $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour :
   a. $a_{ij} = \binom{i+j-2}{i-1}$
   b. $a_{ij} = (a+i+j)^2$, a réel fixé
   c. $a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si} \quad j < i \\ a+b & \text{si} \quad j = i \\ b & \text{si} \quad j > i \end{cases}$
   Utiliser le déterminant $D(x)$ obtenu en ajoutant des x partout. Montrer que c'est une fonction de x d'un type simple qui se calcule facilement en deux valeurs bien choisies.
   Étendre en remplaçant $(a, a+b, b)$ par (a, b, c).
   d. $a_{i,i} = 2$, $a_{ii+1} = 1$, $a_{ii-1} = 3$ et $a_{ij} = 0$ sinon.
   On mettra le résultat sous la forme de la partie imaginaire d'un nombre complexe.
   e. $a_{ij} = \min(i, j)$.
   f. $a_{ij} = S_{\min(i,j)}$ avec
   $$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$
   g. $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \leq i \\ a_j \text{ si } j > i \end{cases}$
   h. $a_{ij} = \begin{cases} x_i \text{ si } i \neq j \\ x_i + y_i \text{ si } i = j \end{cases}$

6. (Edt06) Soit $(P_1, \cdots, P_n)$ des polynômes dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et

$$A = \operatorname*{Mat}_{(1,X,\cdots,X^{n-1})}(P_1, \cdots, P_n)$$

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et V la matrice de VanderMonde associée

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & & & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Soit $Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ la matrice dont le terme d'indice i, j est $P_i(x_j)$.
Former une relation entre les matrices A, Y, V puis entre leurs déterminants.
Application. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1^0 & 2^0 & \cdots & (n)^0 \\ 2^1 & 3^1 & \cdots & (n+1)^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \cdots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

On pourra utiliser le résultat de l'exercice dt01 pour exprimer le déterminant de la matrice V.

7. (Edt07) Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $D \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que $CD = DC$. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)$$

En considérant $D + \lambda I_n$, montrer que la formule reste vraie si D commute avec C sans être inversible.

8. (Edt08) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel pour lequel existe un endomorphisme f tel que $f^2 = -Id_E$. Montrer que la dimension de E est paire.

9. (Edt09) On considère un entier non nul n, une matrice réelle inversible $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$, une famille de $2n$ nombres réels notés

$$(a_{n+1,1}, \cdots, a_{n+1,n}, b_1, \cdots b_n)$$

et des réels $(x_1, \cdots, x_n)$ tels que

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Montrer que :

$$a_{n+1,1}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_n \leq b_{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \det A \cdot \det \begin{bmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{bmatrix} \geq 0$$

10. (Edt10) On considère des nombres réels

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \qquad \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$$

L'objet de cet exercice est de montrer que $\det M > 0$ où $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec

$$m_{i,j} = e^{\alpha_i \beta_j}$$

a. Montrer qu'une fonction du type :

$$x \to \sum_{i=1}^{p} c_i e^{a_i x} \text{ avec } (c_1, \cdots, c_p) \neq (0, \cdots, 0)$$

et $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ s'annule au plus $p-1$ fois.

b. Montrer le résultat annoncé. On pourra considérer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1\beta_1} & \cdots & e^{\alpha_1\beta_{p-1}} & e^{\alpha_1 x} \\ e^{\alpha_2\beta_1} & \cdots & e^{\alpha_2\beta_{p-1}} & e^{\alpha_2 x} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e^{\alpha_p\beta_1} & \cdots & e^{\alpha_p\beta_{p-1}} & e^{\alpha_p x} \end{vmatrix}$$

11. (Edt11) Dans cet exercice, on utilisera le résultat suivant. Le rang d'une matrice est la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite.
Discuter, suivant le rang d'une matrice carrée, du rang de sa comatrice. Déterminer la comatrice d'une comatrice.

12. (Edt12) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n :$$
$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), u_2, \cdots, u_n) + \det_{\mathcal{B}}(u_1, f(u_2), \cdots, u_n) +$$
$$\cdots + \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \cdots, f(u_n))$$
$$= (\operatorname{tr} f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

13. (Edt13) Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note r le rang de B. Il existe alors des matrices inversibles P et Q telles que l'on ait les décompositions en blocs suivantes :

$$PBQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad PAQ = \begin{pmatrix} U & V \\ W & T \end{pmatrix}$$

La fonction

$$t \to \det(A + tB)$$

est polynomiale. Préciser son degré m, son coefficient dominant et le coefficient de X^{m-1}.

14. (Edt14) Déterminant circulant.
Calculer le déterminant de la matrice A de l'énoncé Emm11.

15. (Edt15) Soit α_1, α_2, α_3, α'_1, α'_2, α'_3 six éléments non nuls d'un corps $\mathbf{K}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha'_2 - \alpha'_3 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3 \\ \alpha'_3 - \alpha'_1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3\alpha'_3 - \alpha_1\alpha'_1 \\ \alpha'_1 - \alpha'_2 & \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 \end{pmatrix}$$

Soit C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de cette matrice. Montrer que $\det M = 0$ en considérant

$$C_3 - \alpha_2 C_1 - \alpha'_3 C_2$$

La nullité de ce déterminant est utilisée dans l'exercice ga03 de la feuille sur les espaces affines

16. (Edt16) On considère n nombres réels

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

et la fonction P_n, définie pour tout x réel par

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & & x \end{vmatrix}.$$

Montrer que P_n admet n zéros réels distincts. On pourra considérer la fraction

$$\frac{P_n(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)}.$$

17. (Edt17) Calculer le déterminant de la matrice $n \times n$

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & x & \cdots & x \\ x & x^2+1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ x & \cdots & x & x^2+1 \end{vmatrix}$$

18. (Edt18) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^p = I_n$. Montrer que $(\operatorname{Com} A)^p = I_n$.

19. (Edt19) Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients réels. Montrer que

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

20. (Edt20) Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont $\mathbb{C}$-conjuguées c'est à dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On veut montrer qu'elles sont $\mathbb{R}$-conjuguées c'est à dire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.
    a. Soit $R = \operatorname{Re} P$ et $S = \operatorname{Im} P$. Montrer que
    $$RB = AR \qquad SB = AS$$
    b. Conclure. On pourra considérer $\det(R + tS)$ avec t réel.
21. (Edt21) Déterminant de l'opérateur de transposition.
    a. Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques et $\mathcal{I}$ celui formé par les matrices antisymétriques. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires.
    b. Soit δ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à une matrice M associe $\delta(M) = {}^tM$. Calculer $\det \delta$.
22. (Edt22) Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on pose
    $$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$
    a. Calculer $A\,{}^tA$. Que peut-on en déduire pour l'inversibilité de A ?
    b. Soit $(x, y) \neq (0, 0)$. Calculer ${}^tA + {}^tB\,A^{-1}B$.
    c. En utilisant des opérations élémentaires par blocs, montrer que
    $$\det(M) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2.$$
    d. Montrer que le produit de deux nombres qui sont la somme de 4 carrés d'entiers est encore la somme de 4 carrés d'entiers. (identité des quatre carrés d'Euler)
23. (Edt23)
    a. Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension p et des endomorphismes f, g de E tels que $\operatorname{rg}(f) = 1$ et $f + g$ bijective. Montrer que $\dim(\ker g) \leq 1$.
    b. Montrer qu'une matrice qui ne contient que des nombres entiers impairs sur la diagonale et des nombres pairs ailleurs est inversible.
    c. Dans un champ paissent $p = 2n + 1$ vaches. Lorsqu'une vache (n'importe laquelle) s'isole, les autres forment deux groupes de n bovidés. Il se trouve que la masse totale des vaches est la même pour chaque groupe. Montrer que toutes les vaches ont la même masse.
    On pourra considérer une matrice formée de 0, $+1$, -1 ayant deux colonnes « naturelles » dans son noyau.
24. (Edt24)
    a. Soit T une matrice non nulle $n \times n$ de rang 1. Montrer qu'il existe une matrice ligne L et une matrice colonne C (non nulles) telles que $T = C\,L$.
    b. Soit L et C des matrices ligne et colonne non nulles. Montrer que
    $$\det(I_n + C\,L) = 1 + L\,C.$$
    c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, en considérant d'abord le cas où A est inversible, montrer que
    $$\det(A + C\,L) = \det(A) + L\,{}^t\mathrm{Com}(A)C.$$

1. pas de correction pour Edt01.tex
2. (Cdt02)
   a. On suppose a, b, c, d non nuls. On sort $abcd$ de la dernière ligne par linéarité. On fait entrer successivement a, b, c, d par linéarité dans les colonnes. Après permutation circulaire, on retrouve un déterminant de VanderMonde.
   $$(d-a)(c-a)(b-a)(d-b)(c-b)(d-c)$$
   b. En partant du bas, on soustrait à chaque ligne celle qui est au dessus. On obtient une matrice triangulaire supérieure. Le déterminant est
   $$a(b-a)(c-b)(d-c)$$
   c. Le déterminant (notons le δ) demandé est une fonction polynomiale en c. Son degré est au plus 4. Le coefficient de degré 4 est nul car en fait aucune des 6 permutations intervenant dans la définition du déterminant ne contribue au degré 4. Pour le degré 3, plusieurs permutations contribuent mais leurs contributions s'annullent le degré en c est donc au plus 2. Par symétrie il en est de même pour a et b. Lorsque deux parmi a, b, c sont égaux, le déteminant est nul. On en déduit qu'il existe un λ réel tel que
   $$\forall (a,b,c)\in \mathbb{R}^3,\ \delta = \lambda (a-b)(b-c)(c-d)$$
   On calcule λ avec $a=0$, $b=1$, $c=-1$, on trouve 0.
   d. On commence par ajouter toutes les colonnes dans la première, on sort un 2 de la première colonne par linéarité. On soustrait la première colonne aux deux autres et on permute circulairement. On obtient
   $$2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(b-c)$$
3. On trouve $\delta_n = a\delta_{n-1} - \delta_{n-2}$ pour $n\geq 4$ en développant suivant la première ligne ou la première colonne.
   La forme de la matrice rend indiscutable les valeurs de δ_2 et δ_3. On utilise la formule pour calculer δ_1 puis δ_0. On obtient $\delta_1 = a$ et $\delta_0 = 1$.
   D'après l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire, la suite δ_n est une combinaison de suites géométriques de raison
   $$e^{\theta}, e^{-\theta} \text{ ou } e^{i\theta}, e^{-i\theta}$$
   On calcule les coefficients par les formules de Cramer en utilisant les conditions initiales δ_0 et δ_1. On en tire finalement
   $$\delta_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \text{ ou } \delta_n = \frac{\operatorname{sh}(n+1)\theta}{\operatorname{sh}\theta}$$
4. pas de correction pour Edt04.tex
5. (Edt05)
   a.
   b.
   c.
   d. Notons δ_n le déterminant cherché. En développant suivant la première colonne, on trouve, pour $n\geq 5$, $\delta_n = 2\delta_{n-1} - 3\delta_{n-1}$. On convient des petites valeurs pour que la formule soit toujours valable : $\delta_2 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_0 = 0$. Les racines du polynôme caractéristique de cette relation de récurrence sont $1+i\sqrt{2}$ et $1-i\sqrt{2}$. Après calculs, on trouve
   $$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Im}(1+i\sqrt{2})^n$$
   e. En partant du bas et en remplaçant la ligne L_k par $L_k - L_{k-1}$, on obtient le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Le déterminant cherché est donc 1.
   f. Même méthode que pour le déterminant précédent avec des $\frac{1}{k}$ sur la diagonale à la fin. Le déterminant cherché est donc $\frac{1}{n!}$.
   g. Toujours la même technique. Cette fois on obtient des $a_1 - a_2$ sur la diagonale sauf pour la première ligne. Le déterminant cherché est
   $$a_1(a_1-a_2)^{n-1}$$
   h. On développe en utilisant le caractère multilinéaire et antisymétrique des colonnes. On obtient
   $$b_1b_2\cdots b_n + a_1b_2\cdots b_n + b_1a_2\cdots b_n + \cdots + b_1b_2\cdots a_n$$
6. pas de correction pour Edt06.tex
7. pas de correction pour Edt07.tex
8. pas de correction pour Edt08.tex
9. pas de correction pour Edt09.tex
10. pas de correction pour Edt10.tex
11. pas de correction pour Edt11.tex
12. (Cdt12) On vérifie que l'application δ définie par :
    $$\delta(u_1,\cdots,u_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(u_1),u_2,\cdots,u_n) + \det_{\mathcal{B}}(u_1,f(u_2),\cdots,u_n) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,\cdots,f(u_n))$$
    est multilinéaire et alternée. Il existe donc un λ tel que $\delta = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. On calcule λ en prenant pour u_i les vecteurs de $\mathcal{B}$.
13. Le polynôme est de degré r et son coefficient dominant est
    $$\frac{\det T}{\det P \det Q}$$
14. Du résultat du produit matriciel, on tire
    $$\det A = P(1)P(w)\cdots P(w^{n-1})$$
    après simplification par $\det M$.

15. On trouve
$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha'_3-\alpha'_1)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$
À un coefficient multiplicatif près, le déterminant est donc celui de
$$\begin{vmatrix}\alpha'_2-\alpha'_3 & \alpha_2-\alpha_3 & 0\\ \times & \times & 1\\ \alpha'_1-\alpha'_2 & \alpha_1-\alpha_2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha'_2-\alpha'_3 & \alpha_2-\alpha_3 & 0\\ \times & \times & 1\\ \alpha'_3-\alpha'_2 & \alpha_3-\alpha_2 & 0\end{vmatrix}=0$$

16. (Cdt16) Notons C_i la colonne canonique qui ne contient que des 0 sauf un 1 en position i et C la colonne qui ne contient que des 0.
La colonne i de la matrice dont on veut calculer le déterminant est égale à $(x-a_i)C_i+a_iC$. Quand on développe le déterminant par multilinéarité on on obtient une somme de 2^n déterminants. Tous ceux dans lesquels la colonne C figure deux fois sont nuls. Ils ne reste donc plus que $n+1$ déterminants. Celui qui ne contient pas C qui est diagonal est égal au produit des $x-a_i$ et ceux qui contiennent une fois la colonne C. Une permutation contribuant pour un terme non nul à un tel déterminant coïncide avec l'identité sur $n-1$ éléments. C'est donc l'identité. On en déduit :
$$P_n(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}{x-a_i}$$
d'où
$$\frac{P_n(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-a_i}$$
Notons φ cette fonction. Elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ de chaque côté de a_i. Mais les signes sont opposés entre a_i^+ et a_{i+1}^-. Cette fonction admet donc $n-1$ zéros distincts, un dans chaque intervalle ouvert. Chacun est un zéro de la fonction polynomiale P_n qui étant de degré n admet un n-ième zéro. Il est différent de tous les autres sinon, dans un intervalle il devrait y avoir encore un autre zéro.

17. (Cdt17) Chaque colonne s'exprime comme une combinaison linéaire de deux colonnes dont une n'est formée que de 1. En développant par multilinéarité, on trouve
$$(x^2-x+1)^{n-1}(x^2+(n-1)x+1)$$

18. (Cdt18) L'hypothèse entraine que $(\det A)^p=1$ et que A est inversible. De plus,
$$\begin{aligned}{}^t(\operatorname{Com}A)&=\det A\,A^{-1}\\ &\Rightarrow {}^t(\operatorname{Com}A)^p=(\det A)^p(A^{-1})^p=I_n\\ &\Rightarrow (\operatorname{Com}A)^p=I_n\end{aligned}$$

19. pas de correction pour Edt19.tex

20. (Cdt20) La question a. est immédiate en identifiant les parties réelles et imaginaires des matrices. Lorsque R ou S est inversible on a terminé. Mais que faire si aucune des deux n'est inversible ?
On considère la fonction $\det(R+tS)$ c'est une fonction polynomiale de degré le rang de S (ex dt13). Elle est constante si et seulement si $S=0$ mais alors $P=R$ est réelle. Sinon il existe des t pour laquelle elle n'est pas nulle. La matrice $R+tS$ est alors inversible et vérifie
$$(R+tS)B=A(R+tS)$$
ce qui prouve la relation demandée.

21. (Cdt21)
   a. L'intersection est réduite à la matrice nulle et toute matrice M se décompose en
$$M=\underbrace{\frac{1}{2}(M+{}^tM)}_{\in\mathcal{S}}+\underbrace{\frac{1}{2}(M-{}^tM)}_{\in\mathcal{I}}$$
   b. Comme $\delta\circ\delta=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, on peut d'abord remarquer que $\det\delta=\pm1$. La restriction de δ à $\mathcal{S}$ est $\mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$. La restriction de δ à $\mathcal{I}$ est $-\mathrm{Id}_{\mathcal{I}}$. En fait δ est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}$ dans la direction $\mathcal{I}$. La matrice de δ dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les premiers vecteurs sont dans $\mathcal{S}$ et les suivants dans $\mathcal{I}$ est diagonale avec des 1 au début et des -1 à la fin. On en déduit
$$\det\delta=(-1)^{\dim(\mathcal{I})}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

22. (Cdt22)

23. pas de correction pour Edt23.tex

24. (Cdt24)
   a. Si T est de rang 1, toutes ses colonnes sont engendrées par une seule colonne non nulle. Notons la C. Il existe alors $l_1,\cdots,l_n$ non tous nuls tels que
$$\begin{aligned}&(\forall j\in[\![1,n]\!],\ C_j(T)=l_iC)\\ &\qquad\Rightarrow T=C\,L \text{ avec } L=\begin{pmatrix}l_1 & \cdots & l_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
   b. Notons δ le déterminant cherché et $X_1,\cdots,X_n$ les colonnes de I_n. Ce sont aussi les vecteurs de la base canonique des matrices colonnes. Alors :
$$C_j(I_n+CL)=X_j+l_j\,C$$
Dans le développement du déterminant obtenu par multilinéarité, il ne subsiste plus que les termes contenant au plus une fois la colonne C
$$\begin{aligned}\delta=&\underbrace{\det(X_1,\cdots,X_n)}_{=1}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\det(X_1,\cdots,X_{j-1},l_jC,X_{j+1},\cdots,X_n)}_{=l_jc_j}\\ &=1+L\,C.\end{aligned}$$
   c. Dans le cas où A est inversible, on se ramène à la question précédente en factorisant pas A
$$\begin{aligned}\det(A+CL)&=\det(A)\det(I_n+(A^{-1}C)\,L)\\ &=\det(A)+\det(A)LA^{-1}C\\ &=\det(A)+L\,{}^t\mathrm{Com}(A)C\end{aligned}$$

à cause de l'expression de la matrice inverse avec la transposée de la comatrice.
Lorsque A n'est pas inversible, on obtient la formule en l'approchant par des matrices inversibles par exemple de la forme $A + \lambda I_n$ avec λ non nul mais assez petit pour n'être pas une valeur propre.