1. (Eee01) Soit $E$ euclidien, $f$ une application de $E$ dans $E$ telle que $(f(x)/f(y)) = (x/y)$ pour tout couple $(x, y)$ de vecteurs de $E$. Montrer que $f$ est linéaire et bijective.

2. (Eee02) On prend $\arccos(\frac{(u/v)}{\|u\|\,\|v\|})$ comme définition de l'écart angulaire entre deux vecteurs dans un espace préhilbertien.
Existe-t-il trois vecteurs unitaires d'un espace euclidien dont les écarts angulaires deux à deux dépassent tous $\frac{2\pi}{3}$ ?
On considère $p$ vecteurs unitaires $a_1, \cdots, a_p$, montrer qu'il existe un couple $(i, j)$ tels que $i \neq j$ et que l'écart angulaire entre $a_i$ et $a_j$ soit plus petit que
$$\arccos\left(-\frac{1}{p-1}\right)$$

3. (Eee03) Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien avec le produit scalaire canonique pour lequel la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée), former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équations
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. (Eee04) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tA\,A)$.

5. (Eee05) Montrer que $(./.)$ défini par $(A/B) = \operatorname{tr}({}^tA\,B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que
$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$$

6. (Eee06) Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien (la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée), on définit $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$. Déterminer un système d'équations et une base orthogonale de $F^\perp$.

7. (Eee07) Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien (la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée), le sous espace vectoriel $F$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifiant les équations
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{aligned}$$
Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

8. (Eee08) **Matrices de Gram**
Soit $x_1, \cdots, x_p$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien $E$ et $G(x_1, \cdots, x_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont le terme $i, j$ est $(x_i/x_j)$.
   a. Montrer que si la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est liée alors la matrice $G(x_1, \cdots, x_p)$ n'est pas inversible.
   b. Soit $x_1, \cdots, x_p$ libre. Montrer qu'il existe des matrices inversibles $P$ telles que
   $$G(x_1, \cdots, x_p) = {}^tPP.$$
   En déduire que $\det G(x_1, \cdots, x_p) > 0$. Expliquer pourquoi on peut trouver une matrice $P$ triangulaire supérieure vérifiant la relation précédente.
   Soit $x$ un élément de $E$ et $m_1, \cdots, m_{p+1}$ les mineurs de $G(x_1, \cdots, x_p, x)$ associés aux indices
   $$(p+1, 1), (p+1, 2), \cdots, (p+1, p+1)$$
   sur la dernière ligne.
   c. Soit
   $$y = (-1)^{p+2} m_1 x_1 + \cdots + (-1)^{2p+1} m_p x_p + m_{p+1} x.$$
   Montrer que $y \in (\operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_p))^\perp$.
   d. Montrer que $\frac{1}{m_{p+1}} y$ est la projection orthogonale de $x$ sur $\operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_p)^\perp$.
   e. Montrer que
   $$\begin{aligned} d(x, \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_p)) &= \frac{1}{|m_{p+1}|}\,\|y\| \\ &= \sqrt{\frac{\det(G(x_1, \cdots, x_p, x))}{\det(G(x_1, \cdots, x_p))}}. \end{aligned}$$

9. (Eee09) **Les cinq polyèdres réguliers en dimension trois**.
L'objectif de cet exercice n'est pas de construire ces polyèdres mais seulement de faire comprendre pourquoi il n'y en a que cinq.

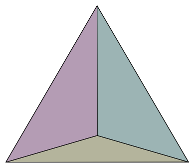

FIG. 1 – tétraèdre

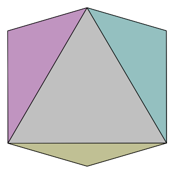

FIG. 2 – octaèdre

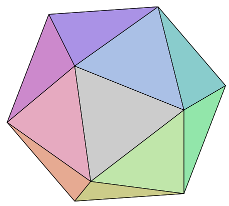

FIG. 3 – icosaèdre

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs unitaires.
On note $\alpha$ l'écart angulaire entre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, $\beta$ l'écart angulaire entre $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$, $\gamma$ l'écart angulaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On suppose $(\overrightarrow{u}/\overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{v}/\overrightarrow{w})$ strictement positifs.
Soit $p$ la projection orthogonale sur le plan orthogonal à $\overrightarrow{w}$ et $\theta$ l'écart angulaire entre $p(\overrightarrow{u})$ et $p(\overrightarrow{v})$ (faire un dessin).
   a. i. Exprimer $\|p(\overrightarrow{u})\|$ et $\|p(\overrightarrow{v})\|$ à l'aide de $\alpha$ et $\beta$.
      ii. Trouver une formule reliant $\cos\theta$ et $\cos\gamma$ et faisant intervenir $\alpha$ et $\beta$.
      iii. Montrer que $\alpha = \beta$ entraîne $\cos\theta < \cos\gamma$ puis $\theta > \gamma$.

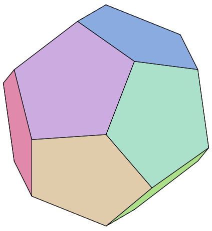

Fig. 4 – dodécaèdre

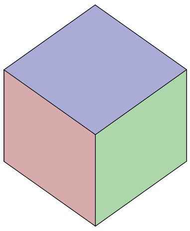

Fig. 5 – cube

b. Calculer l'angle entre deux côtés d'un polygone plan régulier à $p$ côtés.

c. On note $p$ le nombre de sommets par face d'un polyèdre régulier et $q$ le nombre de faces autour d'un sommet. Le couple $(p, q)$ est appelé le *symbole de Schlafli* du polyèdre. On se propose de montrer que seuls 5 couples $(p, q)$ sont possibles. En utilisant une projection bien choisie, montrer que

$$q(1 - \frac{2}{p})\pi < 2\pi$$

En déduire

$$(p-2)(q-2) < 4$$

Former les 5 couples possibles et les associer aux figures proposées.

10. (Eee10) En utilisant un logiciel de calcul formel, calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 x^2\left(e^x - ax - b\right)^2 dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$\inf\left\{\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$\inf\left\{\int_0^1 x^2\left(\ln x - ax - b\right)^2 dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

11. (Eee11) Soit $E$ un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Un sous-espace $V$ est défini par : un vecteur de coordonnées $(x, y, z, t)$ dans $\mathcal{B}$ appartient à $V$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4t &= 0 \end{cases}$$

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $V$.

12. (Eee12) Soit $E$ un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Déterminer la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u, v)$ de $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ avec :

$$u = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \qquad v = 2e_1 + 3e_4$$

13. (Eee13) Soit $E$ un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par les vecteurs de coordonnées $(2, 2, -1, 1)$ et $(2, 5, 0, 1)$ dans $\mathcal{B}$.

14. (Eee14) Soit $E$ un espace euclidien et $x$, $y$ deux éléments de $E$. En considérant

$$\left\| \|y\|^2 x - (x/y)y \right\|^2$$

montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité.

15. (Eee15)

a. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_1, e_2, e_3)$. On considère trois vecteurs

$$u = e_1 + 2e_2 + e_3$$
$$v = e_1 + e_3$$
$$w = -e_1 + e_2$$

Déterminer la matrice dans $(e_1, e_2, e_3)$ d'un produit scalaire pour lequel $(u, v, w)$ est orthonormée.

b. Généralisation. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$ et $P$ la matrice de passage de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.
Quelle est la matrice dans $\mathcal{A}$ d'un produit scalaire pour lequel la base $\mathcal{B}$ est orthonormée ?

c. Exemple. Calculer la matrice comme dans la question précédente avec

$$b_k = \sum_{i=1}^{k} (k - i + 1) a_i$$

pour $k$ entre 1 et $n$.

16. (Eee16) Soit $u$ et $v$ deux vecteurs d'un espace euclidien $E$. En exprimant $(u/v)$ avec des normes, factoriser

$$\|u\| \, \|v\| - (u/v)$$

En déduire que l'inégalité triangulaire est équivalente à celle de Cauchy-Schwarz.

17. (Eee17) On veut montrer que, pour $k$ entre 1 et un entier $p > 1$ fixé, les fonctions

$$s_k : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(kt) \end{cases}$$

forment une famille libre dans l'espace $\mathcal{C}([0, \frac{\pi}{2}])$.

a. Calculer
$$\int_0^{\pi} \sin(it)\sin(jt)\, dt$$
En déduire que la famille des fonctions définies dans $[0, \pi]$ est libre.

b. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des nombres complexes. Montrer que si la fonction

$$t \to \lambda_1 \sin t + \lambda_2 \sin(2t) + \cdots + \lambda_p \sin(pt)$$

s'annule strictement plus de $2p$ fois alors les $\lambda_i$ sont tous nuls. Que peut-on en déduire relativement à des restrictions des fonctions considérées ?

18. (Eee18) Dans un espace euclidien, $p$ est une projection telle que
$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$
Montrer que $p$ est une projection orthogonale.

19. (Eee19) Soit $E$ euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha > 0$. On considère les deux propriétés suivantes
$$\begin{aligned}&\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\|x\|\\ &\forall (x,y) \in E^2,\ (f(x)/f(y)) = \alpha^2(x/y)\end{aligned}$$
   a. Montrer que les deux propriétés sont équivalentes. On dit alors que $f$ est une *similitude* de rapport $\alpha$.
   b. Montrer qu'un endomorphisme non nul de $E$ est une similitude si et seulement si il conserve l'orthogonalité.

20. (Eee20) On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension $p \geq 3$ muni d'une base $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $p$ nombres réels $a_1, \cdots, a_{p-1}$, $c$. À l'aide d'une matrice
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} & c \end{pmatrix}$$
on définit une forme bilinéaire symétrique $\beta$ sur $E$ en posant :
$$\forall (x,y) \in E^2, \beta(x,y) = {}^t\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(x)\, S\, \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(y)$$
Montrer que $\beta$ est un produit scalaire si et seulement si $\det S > 0$.

21. (Eee21) On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension 4 avec une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. L'hyperplan $H$ est l'ensemble des vecteurs $x$ dont les coordonnées $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifient
$$5x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$$
Former la matrice dans $\mathcal{E}$ de la symétrie orthonogonale (réflexion) par rapport à $H$.

22. (Eee22) Soit $E$ euclidien et $U$, $V$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que, pour tout $a \in E$, il existe un unique $(x, u, v, y)$ tel que
$$a = x + u + v + y \text{ avec } \begin{cases} x \in U \cap V \\ u \in (U \cap V)^\perp \cap U \\ v \in (U \cap V)^\perp \cap V \\ y \in U^\perp \cap V^\perp \end{cases}$$

23. (Eee23) Soit $E$ un espace euclidien, $(a, b)$ une famille libre de deux vecteurs, $V = \operatorname{Vect}(a, b)$. On note
$$\Phi : \begin{cases} E \setminus \{0_E\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(x/a)(x/b)}{\|x\|^2} \end{cases}, \qquad \mathcal{H} = \Phi(V \setminus \{0_E\}).$$
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note aussi $x_\lambda = \lambda a + b$.
   a. Préciser $K \in \mathbb{R}$ tel que
$$(x_\lambda/a)(x_\lambda/b) - (a/b)\|x_\lambda\|^2 = K\,\lambda.$$
   b. Une fonction $\varphi$ est définie dans $\mathbb{R}$ par :
$$\lambda \mapsto \frac{\lambda}{\|\lambda a + b\|^2} \text{ avec } I = \varphi(\mathbb{R}).$$
   Pourquoi $I$ est-il un intervalle ? En étudiant $\varphi$, déterminer $I$.
   c. Déterminer $\mathcal{H}$ en utilisant $I$.
   d. À l'aide de la projection orthogonale sur $V$, montrer que $\Phi(x) \in \mathcal{H}$ pour tout $x$ non nul de $E$.
   En déduire l'inégalité de Richard
$$\begin{aligned}((a/b) - \|a\|\|b\|))\,\|x\|^2 &\leq 2(x/a)(x/b)\\ &\leq ((a/b) + \|a\|\|b\|))\,\|x\|^2.\end{aligned}$$

24. (Eee24) Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1])$. On définit
$$\forall (f,g) \in E^2,\ (f/g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,dt$$
   a. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire.
   b. Soit
$$\begin{aligned}F &= \{f \in E \text{ tq } f(0) = f(1) = 0\}\\ G &= \{g \in E \text{ tq } g'' = g\}\end{aligned}$$
   Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires orthogonaux. Préciser la projection orthogonale sur $G$.

25. (Eee25) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et
$$\begin{aligned}&w = 2e_1 + 3e_2 + e_3 = (2,3,1),\\ &\Pi = (\operatorname{Vect} w)^\perp, \quad s = s_\Pi, \quad S = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} s.\end{aligned}$$
   a. Donner une base $(u, v)$ de $\Pi$. Pourquoi $(u, v, w)$ est-elle une base de $E$ ?
   b. Écrire la matrice $S'$ de $s$ dans $(u, v, w)$.
   c. En déduire $S$.

26. (Eee26) Soit $E$ pré-hilbertien et $F$, $G$ deux sous-espaces de $E$. Montrer que
$$\left.\begin{matrix} F \subset G^\perp \\ E = F + G \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} G = F^\perp \\ F = G^\perp \end{cases}.$$

27. (Eee27) Soit $E$ euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$\forall x \in E,\ (x/f(x)) = 0.$$
Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f^\perp$.

28. (Eee28) Montrer que, $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$
Cas d'égalité ?

1. Soit $f$ une application qui n'est pas supposée linéaire mais qui conserve le produit scalaire. Pour tous vecteurs $x$ et $y$, développons
$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|^2$$
On obtient une somme de produits scalaires avec des $f$ de chaque côté que l'on peut enlever par conservation du produit scalaire. Cela conduit au développement de
$$\|(x+y)-x-y\|^2=0$$
On montre de même que
$$\|f(\lambda x)-\lambda x\|^2=0$$
Une fois que l'on sait que $f$ est linéaire, on montre qu'elle est injective en considérant la norme d'un vecteur du noyau puis qu'elle est bijective car un espace euclidien est de dimension finie.

2. (Cee02) On part de la formule (pour 3 vecteurs unitaires)
$$\|a+b+c\|^2=3+2(a/b)+(a/c)+(b/c)$$
Comme cos est décroissante dans $[0,\pi]$ :
$$\text{écart ang. } \delta>\frac{2\pi}{3}\Rightarrow \cos\delta<-\frac{1}{2}$$
Si les trois écarts angulaires étaient plus grand que $\frac{2\pi}{3}$, le carré scalaire serait négatif.
De même avec $p$ vecteurs :
$$\begin{aligned}0\leq\left\|\sum_{i=1}^{p}a_i\right\|^2&=p+2\sum_{i<j}(a_i/a_j)\\&\leq p+p(p-1)\max\{(a_i/a_j),\,i\neq j\}\\&\Rightarrow \max\{(a_i/a_j),\,i\neq j\}\geq-\frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

3. pas de correction pour Eee03.tex

4. (Cee04) Une inégalité vient de
$$\operatorname{rg}(PQ)\leq\min(\operatorname{rg}(P),\operatorname{rg}(Q))$$
Pour l'autre, on note $r=\operatorname{rg}(A)$ et on considère les colonnes
$$C_{i_1},\cdots,C_{i_r}$$
formant une base de l'espace des colonnes de $A$. La matrice du produit scalaire canonique dans cet espace est inversible. Elle est extraite de ${}^tA\,A$.

5. pas de correction pour Eee05.tex

6. pas de correction pour Eee06.tex

7. pas de correction pour Eee07.tex

8. pas de correction pour Eee08.tex

9. pas de correction pour Eee09.tex

10. pas de correction pour Eee10.tex

11. (Cee11) Comme $V=\operatorname{Vect}(u,v)^{bot}$ avec
$$u=(1,1,1,1),\qquad v=(1,2,3,4),$$
on commence par orthogonaliser la famille $(u,v)$ en $(u,v')$ avec
$$v'=v-\frac{5}{2}u=\frac{1}{2}(-3,-1,1,3)$$
On utilise $p_{V^\perp}$ pour exprimer la symétrie :
$$s_V=\operatorname*{Id}_E-2p_{V^\perp}$$
avec
$$\begin{aligned}&p_{V^\perp}((x_1,x_2,x_3,x_4))\\&\quad=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}(1,1,1,1)\\&\qquad+\frac{-3x_1-x_2+x_3+3x_4}{20}(-3,-1,1,3)\end{aligned}$$

12. (Cee12) On orthogonalise $(u,v)$ en $(u',v')$ avec
$$v'=v-\frac{5}{4}u=\frac{1}{4}(3,-5,-5,7)$$
En notant $V=\operatorname{Vect}(u,v)$,
$$\begin{aligned}p_V((x_1,x_2,x_3,x_4))&=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}(1,1,1,1)\\&+\frac{3x_1-5x_2-5x_3+7x_4}{108}(3,-5,-5,7)\end{aligned}$$

13. (Cee13) Notons $u$ et $v$ les deux vecteurs donnés et $P$ le plan qu'ils engendrent. Orthogonalisons la famille en $(u,w)$ avec
$$w=v-\frac{(u/v)}{\|u\|^2}u=v-\frac{3}{2}u$$
Les coordonnées de $w$ sont
$$\frac{1}{2}(-2,4,3,-1)$$
La symétrie demandée s'écrit
$$s_P=p_P-p_{P^\perp}=2p_P-Id_E$$
avec
$$p_P(x)=\frac{(x/u)}{\|u\|^2}u+\frac{(x/v)}{\|v\|^2}v$$
La colonne des coordonnées de $p_P(x)$ s'écrit
$$\frac{1}{10}(2x_1+2x_2-x_3+x_4)\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{30}(-2x_1+4x_2+3x_3-x_4)\begin{pmatrix}-2\\4\\3\\-1\end{pmatrix}$$
La matrice de $p_P$ est donc
$$\frac{1}{30}\begin{pmatrix}16&4&-12&8\\4&28&6&2\\-12&6&12&-6\\8&2&-6&4\end{pmatrix}$$

celle de $s_P$ :
$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 & 8 \\ 4 & 13 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & -3 & -6 \\ 8 & 2 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

14. (Cee14) Développons la quantité que l'énoncé nous demande de considérer (vecteurs non nuls)
$$\begin{aligned}&\left\|\|y\|^2x-(x/y)y\right\|^2\\ &\quad=\|y\|^4\|x\|^2+(x/y)^2\|y\|^2-2\|y\|^2(x/y)^2\\ &\quad=\|y\|^2\left(\|y\|\|x\|-|(x/y)|\right)\underbrace{\left(\|y\|\|x\|+|(x/y)|\right)}_{>0}\end{aligned}$$
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Dans le cas d'égalité, on retrouve bien que les vecteurs sont colinéaires.

15. (Cee15)
 a. On utilise la formule de la question b. On obtient
$$P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&-\frac12\\-\frac12&-\frac12&\frac32\\-1&0&1\end{pmatrix}$$
 La matrice cherchée est
$$\begin{pmatrix}\frac32&\frac12&-2\\\frac12&\frac12&-1\\-2&-1&\frac72\end{pmatrix}$$
 Remarque. Le code Maple suivant permet d'effectuer le calcul
```
with(LinearAlgebra):
P := Matrix([[1,1,-1],[2,0,1],[1,1,0]]);
Q :=P^(-1);
MatrixMatrixMultiply(Transpose(Q),Q);
```
 b. D'après les formules (de cours) de changement de base pour la matrice d'un produit scalaire :
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(/)={}^tP_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\underbrace{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(/)}_{=I_n}P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}={}^tP^{-1}P^{-1}$$
 c. On peut exprimer assez facilement $a_1$, $a_2$, $a_3$ en fonction des $b_i$ puis vérifier la formule
$$b_{k-1}-2b_k+b_{k+1}=a_{k+1}$$
 pour $k$ entre 2 et $n-1$. On en déduit la matrice de passage
$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0&\cdots&0\\0&1&-2&1&&\vdots\\&0&1&-2&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&1\\&&&\ddots&\ddots&-2\\0&&\cdots&&0&1\end{pmatrix}$$
 puis la matrice cherchée qui est une matrice bande de largeur 4
$$\begin{pmatrix}1&-2&1&0&0&\cdots&0\\-2&5&-4&1&0&&\vdots\\1&-4&6&-4&1&\ddots&0\\0&1&-4&6&&\ddots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&&1\\\vdots&\ddots&\ddots&1&-4&6&-4\\0&\cdots&0&0&1&-4&6\end{pmatrix}$$

16. (Cee16)
$$\begin{aligned}&(u/v)=\frac12\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)\\ &\Rightarrow\|u\|\,\|v\|-(u/v)=\frac12\left((\|u\|+\|v\|)^2-\|u+v\|^2\right)\\ &\quad=\underbrace{(\|u\|+\|v\|+\|u+v\|)}_{\geq0}(\|u\|+\|v\|-\|u+v\|)\end{aligned}$$
On en déduit l'équivalence demandée.

17. (Cee17)
 a. Il s'agit d'un calcul classique à savoir faire très rapidement. En linéarisant, on trouve que l'intégrale est nulle pour $i\neq j$ et égale à $\frac{\pi}{2}$ si $i=j$. On en déduit que la famille est orthogonale pour le produit scalaire habituel définie par l'intégrale du produit. Comme elle est constituée de fonctions non nulle, cette famille est libre.
 b. Écrivons chaque sin avec une exponentielle.
$$\sin(kt)=\frac{1}{2i}\left((e^{it})^k-(e^{it})^{-k}\right)$$
 En factorisant par $e^{ikt}$, on peut écrire la somme de sin sous la forme
$$e^{ikt}P(e^{it})$$
 où $P$ est un polynôme à coefficients complexes (et s'exprimant simplement en fonction des $\lambda_k$) de degré $2p$. Lorsque ce polynôme admet strictement plus de $2p$ racines, tous ses coefficients sont nuls donc les $\lambda_k$ sont tous nuls.
 On en déduit que la famille des restrictions à un intervalle non réduit à un point est libre. En effet un tel intervalle contient une infinité de points.

18. (Cee18) On va montrer que, si $p$ n'est pas orthogonale, il existe un vecteur strictement plus long que l'un de ses antécédents par projection.
En effet $\operatorname{Im} p\subset\ker(p)^\perp$ est alors faux sinon on aurait l'égalité. Il existe $b\in\operatorname{Im}(p)$ qui n'est pas orthogonal à $\ker(p)$ donc il existe $a\in\ker(p)$ tel que $(a/b)\neq0$. Pour tous les réels $\lambda$, les vecteurs $b_\lambda=b+\lambda a$ sont des antécédents de $b$ pour la projection. Quel est le plus court ? Aura-t-on la malchance que ce soit $b_0=b$ ?
Une équivalence locale en 0 prouve que non :
$$\|b_\lambda\|^2-\|b\|^2\sim2(a/b)\lambda$$

Il existe donc bien des $\lambda$ réels proches de 0 tels que

$$\|b_\lambda\| < \|b\| = \|p(b_\lambda)\|$$

19. (Cee19)
   a. Un sens est évident par spécialisation, l'autre est facile par linéarité en utilisant les identités de polarisation.
   b. Il est évident qu'une similitude conserve l'orthogonalité d'après la deuxième propriété.
   Considérons un $f \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve l'orthogonalité.
   Pour tous $x$ et $y$ dans $E$ avec $x \neq 0$, on a alors :

$$(f(x)/f(y)) = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}(x/y)$$

   Il suffit pour cela d'orthogonaliser $(x, y)$ en $(x, y')$ et d'écrire que $f(x)$ et $f(y)$ sont orthogonaux.
   Il reste à montrer que tous les

$$\alpha_x = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$$

   sont égaux entre eux pour tous les $x$ non nuls.
   En échangeant les rôles de $x$ et de $y$, on obtient $\alpha_x = \alpha_y$ pour $x$ et $y$ non nuls et non orthogonaux.
   Lorsque $x$ et $y$ sont orthogonaux, on peut toujours trouver un $z$ non nul et qui n'est orthogonal à aucun des deux. On en déduit l'égalité par transitivité.

20. (Cee20) Le déterminant de $S$ se calcule facilement avec la méthode du pivot standard. On se ramène à une matrice triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale sauf pour le terme $p, p$. On obtient

$$\det S = c - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_{p-1}^2$$

Il reste à vérifier que $\beta(x, x) \geq 0$ et que $\beta(x, x) = 0$ entraine $x = 0$ pour tout vecteur $x$ de $E$.
Considérons donc un vecteur $x$ quelconque de coordonnées $(x-1, \cdots, x_p)$. On calcule en utilisant d'abord l'expression matricielle puis en faisant apparaitre des carrés

$$\begin{aligned}
&\beta(x,x) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + a_1 x_p \\ x_2 + a_2 x_p \\ \vdots \\ x_{p-1} + a_{p-1} x_p \\ a_1 x_1 + \cdots + a_{p-1} x_{p-1} + c x_p \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + \cdots + x_{p-1}^2 + c x_p^2 + 2\left(a_1 x_1 + \cdots + a_{p-1} x_{p-1}\right) x_p \\
&= \left((x_1 + a_1 x_p)^2 - a_1^2 x_p^2\right) + \cdots \\
&\quad + \left((x_{p-1} + a_{p-1} x_p)^2 - a_{p-1}^2 x_p^2\right) + c x_p^2 \\
&= (x_1 + a_1 x_p)^2 + \cdots + (x_{p-1} + a_{p-1} x_p)^2 + (\det S) x_p^2
\end{aligned}$$

On en déduit les propriétés demandées.

21. (Cee21) Sur l'équation de $H$, on lit les coordonnées d'un vecteur $u$ orthogonal à $H$ :

$$u = 5e_1 - 2e_2 - 2e_3 + 4e_4$$

Soit $U = \text{Vect}(u) = H^\perp$. La symétrie $s_H$ par rapport à $H$ s'exprime en fonction de la projection $p_U$ sur $U$

$$s_H = p_H - p_U = Id_E - 2p_U$$

On connait l'expression vectorielle de $P_U$ :

$$p_U(x) = \frac{(x/u)}{\|u\|^2} u$$

soit pour la matrice des coordonnées :

$$\frac{1}{49}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4) \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit la matrice de $p_U$ :

$$\frac{1}{49} \begin{pmatrix} 25 & -10 & -10 & 20 \\ -10 & 4 & 4 & -8 \\ -10 & 4 & 4 & -8 \\ 20 & -8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

puis celle de $s_U$

$$\frac{1}{49} \begin{pmatrix} -1 & 20 & 20 & -40 \\ 20 & 41 & -8 & 16 \\ 20 & -8 & 41 & 16 \\ -40 & 16 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

22. (Cee22) Soit $U$ et $V$ deux sous-espaces de $E$ euclidien. On veut montrer que, pour tout $a \in E$, il existe des uniques vecteurs

$$x \in U \cap V,\ u \in (U \cap V)^\perp \cap U,\ v \in (U \cap V)^\perp \cap V,$$
$$y \in U^\perp \cap V^\perp$$

tels que $x = x + u + v + y$.
Existence. Décomposons $a$ en utilisant la formule du cours pour l'orthogonal d'une somme :

$$a = \underbrace{p_{U^\perp \cap V^\perp}(a)}_{=y} + \underbrace{p_{U+V}(a)}_{=b}$$

On peut encore décomposer $b$ (sans unicité). Il existe $u_0 \in U$ et $v_0 \in V$ tels que $b = u_0 + v_0$.
Comme $U \cap V$ est un sous-espace de $U$ et de $V$, posons

$$\begin{aligned}
u &= p_{(U \cap V)^\perp \cap U}(u_0) \in (U \cap V)^\perp \cap U, \\
v &= p_{(U \cap V)^\perp \cap V}(v_0) \in (U \cap V)^\perp \cap V
\end{aligned}$$

Alors :

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= u + w_u \quad \text{avec } w_u \in U \cap V \\ v_0 &= v + w_v \quad \text{avec } w_v \in U \cap V \end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow b = u + v + \underbrace{(w_u + w_v)}_{=x \in U \cap V}$$

Unicité.

$$a = \underbrace{x + u + v}_{\in U+V = (U^\perp \cap V^\perp)^\perp} + \underbrace{y}_{\in U^\perp \cap V^\perp} \Rightarrow y = p_{U^\perp \cap V^\perp}(a)$$

$$a = \underbrace{x}_{\in U\cap V} + \underbrace{u+v+y}_{\in U^\perp + V^\perp = (U\cap V)^\perp} \Rightarrow x = p_{U\cap V}(a)$$

Ceci assure l'unicité du $x$ et du $y$. d'autre part,

$$\begin{aligned} x+u+v+y = x+u'+v'+y &\Rightarrow u+v = u'+v' \\ &\Rightarrow u-u' = v'-v \in (U\cap V)^\perp \cap (U\cap V) = \{0_e\} \end{aligned}$$

23. (Cee23)

a. En développant, on trouve

$$(x_\lambda/a)(x_\lambda/b) - (a/b)\left\|x_\lambda\right\|^2 = K\lambda$$
$$\text{avec } K = \left(\|a\|^2\|b\|^2 - (a/b)^2\right)$$

b. La fonction est rationnelle :

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{\|a\|^2\lambda^2 + 2(a/b)\lambda + \|b\|^2}$$

et son dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc continue ce qui entraine que $I = \varphi(\mathbb{R})$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Elle change de signe en 0 et converge vers 0 en + et $-\infty$. Le calcul de la dérivée montre qu'elle admet ses extréma absolus pour

$$\lambda = \pm\frac{\|b\|}{\|a\|}$$

les valeurs étant

$$M = \frac{\|a\|\|b\|}{\|\|b\|a + \|a\|b\|^2} = \frac{1}{2\left((a/b) + \|a\|\|b\|\right)}$$
$$m = -\frac{\|a\|\|b\|}{\|\|b\|a - \|a\|b\|^2} = \frac{1}{2\left((a/b) - \|a\|\|b\|\right)}$$

ce qui entraine $I = [m, M]$.

c. En fait $\mathcal{H}$ est l'image d'une partie de $V$ car

$$\Phi(\lambda a + \mu b) = \Phi(\frac{\lambda}{\mu}a + b).$$

On peut donc se limiter aux $\Phi(x_\lambda)$ et, d'après a.,

$$\Phi(x_\lambda) = (a/b) + K\varphi(\lambda).$$

On en tire

$$\mathcal{H} = \left[(a/b) + Km, (a/b) + KM\right].$$

d. D'après la question précédente, $\mathcal{H}$ est un intervalle. En considérant un vecteur orthogonal à $a$ ou $b$ dans $V$, on montre que $0 \in \mathcal{H}$. De plus

$$\forall x \in E,\ \Phi(x) = \underbrace{\frac{\|p(x)\|^2}{\|x\|^2}}_{\in[0,1]} \underbrace{\Phi(p(x))}_{\in\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$$

car $\mathcal{H}$ est un intervalle qui contient 0.
En calculant, on trouve

$$(a/b) + Km = \frac{1}{2}\left((a/b) - \|a\|\|a\|\right)$$
$$(a/b) + KM = \frac{1}{2}\left((a/b) + \|a\|\|a\|\right)$$

L'inégalité de Richard est équivalente à $\Phi(x) \in \mathcal{H}$.

24. pas de correction pour Eee24.tex

25. (Cee25)

a. L'énoncé n'impose rien à $u$ et $v$ sauf d'être orthogonaux à $w$. Choisissons

$$\begin{aligned} u &= e_1 - 2e_3 = (1,0,-2) \\ v &= e_2 - 3e_3 = (0,1,3) \end{aligned}$$

La famille $(u,v)$ est libre et ses deux vecteurs sont orthogonaux à $w$ donc la famille $(u,v,w)$ est libre, c'est une base de $E$.

b. Par définition de $s$, $s(u) = u$, $s(v) = v$, $s(w) = -w$. On en déduit

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c. On en déduit par changement de base

$$S = P\,S'\,P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

après calculs

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$
$$S = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

26. pas de correction pour Eee26.tex

27. pas de correction pour Eee27.tex

28. pas de correction pour Eee28.tex